

D: IPvK

解説: beet

はじめに

- 問題文中の IPvK の定義は現実に即していない
 - IPv6 は 16 byte
- 区切り文字の . が積の記号に見えなくもないという裏設定がある

問題概要

- 以下の値を求めよ
 - 多項式 $f(x)$ に対し、 $[x^n] f(x)$ は $f(x)$ の n 次の項の係数を表す

$$[x^N] \left(\sum_{i=0}^{255} ix^i \right)^K \pmod{998244353}$$

- $K \leq 2000$, $N \leq K * 255$

解法

1. 畳み込み(考察不要、実装重め)
 2. 式変形→二項係数(実装軽め)
 3. DP(実装軽め、実行時間重め)
- ICPC では、実装の3倍の時間を考察に使える
 - パソコン1台に対し人間3人
 - 複数の方針を検討するとよい

解法1: 畳み込み

- 多項式の積を高速に計算するアルゴリズムを用いる
 - Fast Fourier Transform (FFT)
 - Number Theoretic Transform (NTT)
- 繰り返し二乗法で $O(N \log N \log K)$
 - 変換後に各点で K 乗して戻すと $O(N (\log N + \log K))$ になる

解法2: 式変形→二項係数

- (FPS での)式変形をする
 - 考え方1: 階差を取る
 - 考え方2: $(1-x^{256})/(1-x)$ を微分する

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{255} ix^i \right)^K &= \left(\frac{x - 256x^{256} + 255x^{257}}{(1-x)^2} \right)^K \\ &= \frac{(x - 256x^{256} + 255x^{257})^K}{(1-x)^{2K}} \end{aligned}$$

解法2: 式変形→二項係数(続き)

- 分子

- 項数が 3 → $O(K^2)$ で計算できる

$$\begin{aligned} & (x - 256x^{256} + 255x^{257})^K \\ &= \sum_i \sum_j \binom{K}{i} \binom{K-i}{j} x^i (-256x^{256})^j (255x^{257})^{K-i-j} \end{aligned}$$

- 分母

- $2K$ 回累積和を取ることに相当する
- 分子の i 次の項は $\binom{(N-i) + (2K-1)}{2K-1}$ 回足される(重複組み合わせ)

解法3: DP

- $DP[i][j] := i$ 人目の候補者まで得票数が決まっていて、それまでの投票数の合計が j のときの積の和
 - 状態 $O(KN)$ 、遷移 255 通り
 - 2 次の imos 法を使うと遷移が $O(1)$ になる
- 最悪ケースでも $NK = 1e9$ 程度のため、数秒で終わる
 - 全体でも数分で終わる

統計

- First CORRECT: suzukaze_Aobayama (33m22s)
 - 解法3: DP
- First CONGRATULATIONS: tonosama (41m43s)
 - 解法2: 式変形→二項係数