

JAG Spring Contest 2015
(2015/04/19)

問題E

Cost Performance Flow

原案, 解法: 澤
問題文: 井上
校正: 矢野
解答作成: 澤, 井上
解説: 澤

概要

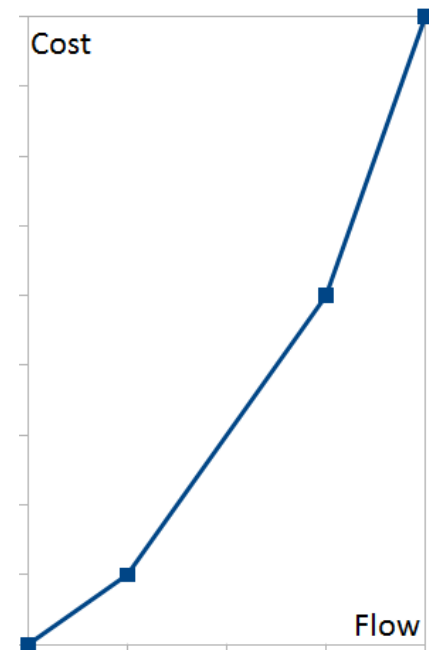
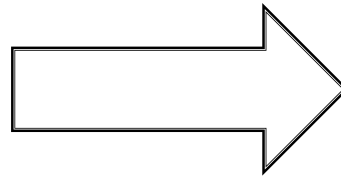
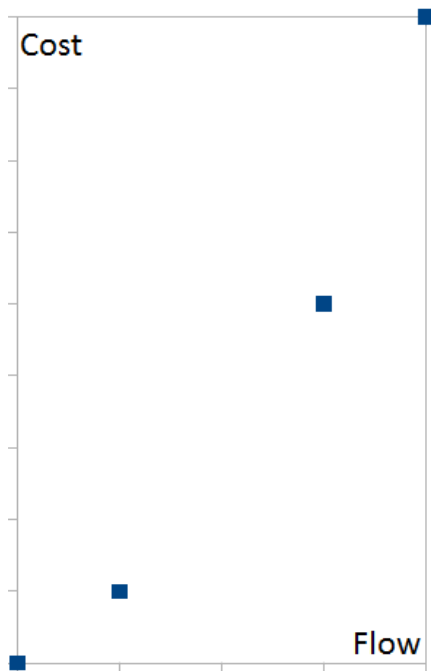
- ▶ 辺に容量とコストが付いたグラフと, 2頂点 s, t が与えられる.
- ▶ $s - t$ フロー f に対し,
$$B(f) = ((s - t \text{ 最大流}) - f \text{ のフロー量})^2 + (f \text{ のコスト})^2$$
とする.
- ▶ $B(f)$ を最小化するフローを求め,
その最小値を有理数で答えよ. (答えが有理数になることは保証されている)

解法

- ▶ 最小費用最大流問題に対する最短路反復法(a.k.a. Primal-Dual 法)を使う.
 - $flow \leftarrow 0, cost \leftarrow 0$
 - while 残余グラフ上で s-t path が存在する:
 - $P \leftarrow$ 残余グラフ上の最小コスト s-t path
 - $f \leftarrow$ P に含まれる辺の最小残余容量
 - $c \leftarrow P$ のコスト
 - $flow \leftarrow flow + f$
 - $cost \leftarrow cost + f \times c$
 - return ($flow, cost$)

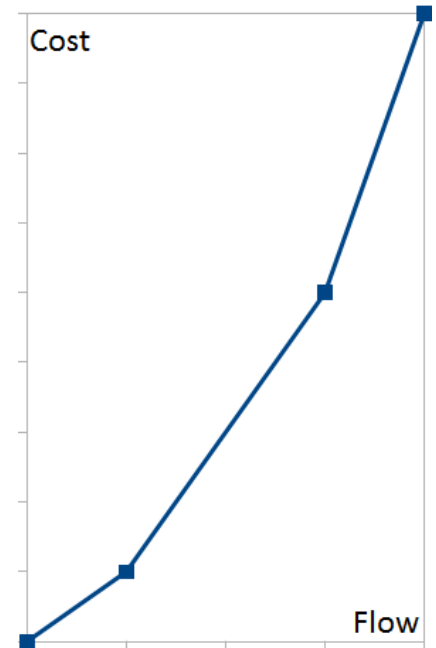
解法

- ▶ 前ページの疑似コードの, $(flow, cost)$ のとる値をプロットし, 線分でむすぶ.



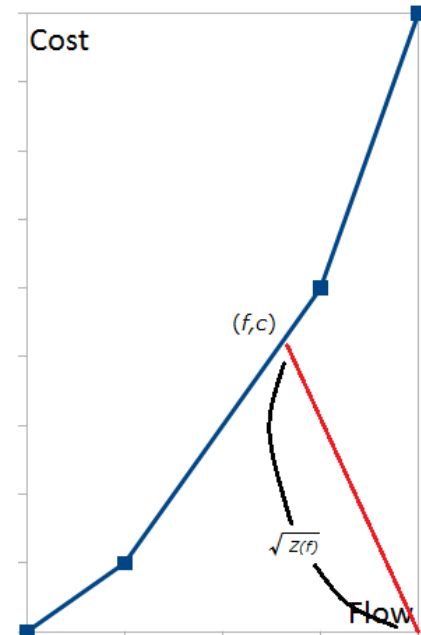
解法

- ▶ この折れ線関数 ϕ は, 次の性質を持つ.
 - 折れ線上の点 $(f, \phi(f))$ をフロー量, フローコストにもつフローが実現可能で, $\phi(f)$ は f を流すのにかかる最小コストである.
 - 下に凸である.
 - 疑似コード中の c が単調非減少だから.
 - 右上の点は最小費用最大流を表す.



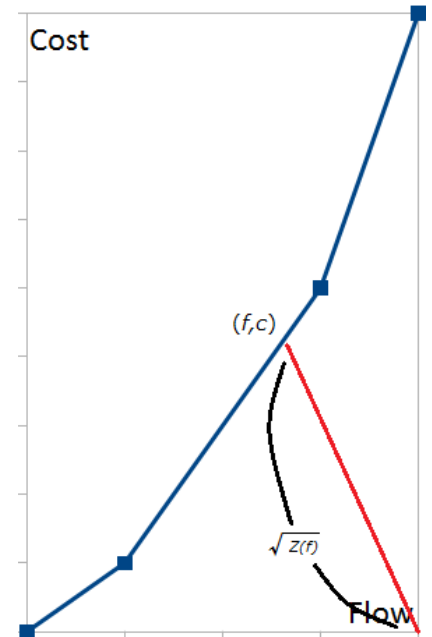
解法

- ▶ フロー量, フローコストが (f, c) なフローに対する目的関数値は, $(M - f)^2 + c^2$ だった.
 - ここで, M は最大流量.
 - 従って, 同じフロー量なら, コストが少ないほうがよい.
 - よって, 折れ線上の点のみ考えればよい.
- ▶ 目的関数は, 点 $(M, 0)$ からのユークリッド距離の二乗になっている.
- ▶ $Z(f) = (M - f)^2 + \phi(f)^2$ とおく.
 - 下に凸な関数の和なので, これも下に凸.



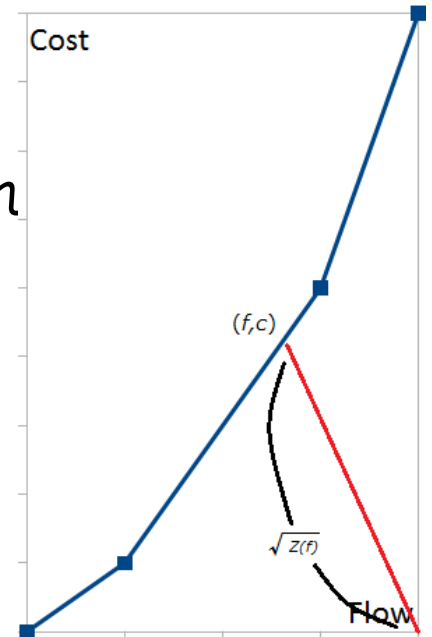
解法

- ▶ 折れ線の節点を $(f_i, \phi(f_i)), i = 0, \dots, n$ とし,
 $(f_i, \phi(f_i))$ から $(f_{i+1}, \phi(f_{i+1}))$ への傾きを t_i とする.
 - t_i は疑似コード中の c である.
- ▶ $0 \leq \Delta \leq f_{i+1} - f_i$ に対し, $Z(f_i + \Delta)$ は,
 $Z(f_i + \Delta) = (M - f - \Delta)^2 + (\phi(f_i) + t_i \Delta)^2$.



解法

- ▶ Δ で微分し, $Z(f_i + \Delta)$ の最小値を与える Δ を求める.
- ▶ 求めた Δ が $0 < \Delta < f_{i+1} - f_i$ を満たすなら, $Z(f_i + \Delta)$ が答え.
 - $Z(f)$ が凸だから, 局所最適解は大域最適解.
 - 式変形か幾何をすると,
$$f_i - M + t_i \phi(f_i) < 0 < f_{i+1} - M + t_i \phi(f_{i+1})$$
という, 同値だがオーバーフローしにくい式が得られ
- ▶ どの i でもそうならなければ, $Z(f_i)$ の最小値が答え.



注意点

- ▶ 適切に計算しないと、オーバーフローする。
 - 特に、有理数の大小比較に注意。
 - 適切に計算すれば、64 bit 整数内で計算できる。
- ▶ Java なら BigInteger が使える。
- ▶ C++ でも、標準ではないので推奨しないが、`__int128` が使える可能性がある。
 - 練習セッションで、使える環境かを確認するべき。

ジャッジ解

▶ 澤

- C++ 118行/3335 Byte
- JAVA 193行/6936 Byte

▶ 井上

- C++ 135行/2986 Byte

結果

- ▶ First AC
 - すぬけブースター feat. GUMI (208:14)
- ▶ AC / Submit
 - 3/19 (16%)
- ▶ AC / Trying
 - 3/3 (100 %)