E: Buttons

原案: not

問題文: not

解答: hec, hos, not, tomerun, tsutaj

解説: hec

問題概要

- 大きさが $H \times W\ (2 \leq H, W \leq 50)$ のグリッドが与えられ、パラメータ $a, b\ (-10^5 \leq a, b \leq 10^5)$ を持つボタンが各マスに存在する。(マスごとにパラメータは異なる)
- 隣接するボタンとの関係を考慮した上で、全てのボタンを良いタイミングで押せるか判定せよ。押せる場合はその時刻も出力せよ。

問題概要

- ボタンを押す良いタイミングとは?
  - あるボタンのパラメータを $a_{\mathrm{cur}}, b_{\mathrm{cur}}$ とし、このボタンを押す時刻を t_{cur}、ある隣接したボタンを押す時刻を t_{adj} とした時に

$$0 \leq t_{\mathrm{cur}}, t_{\mathrm{adj}} \leq 10^9, t_{\mathrm{adj}} + a_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{adj}} + b_{\mathrm{cur}}$$

解法

- まず、不等式を整理してみる。
  - $t_{\mathrm{adj}} + a_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{cur}}$ を $t_{\mathrm{adj}} - t_{\mathrm{cur}} \leq -a_{\mathrm{cur}}$ と変形
  - $t_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{adj}} + b_{\mathrm{cur}}$ を $t_{\mathrm{cur}} - t_{\mathrm{adj}} \leq b_{\mathrm{cur}}$ と変形
- 全ての不等式は2変数の差で表せるので、最短路アルゴリズムで解くことができる!

解法

- グリッドの各マスをグラフの頂点とみなし、t_{cur} を頂点 v のポテンシャルと捉える。v に隣接したある頂点 u のポテンシャルを t_{adj} とする。その上で次のように辺を貼る。
  - $t_{\mathrm{adj}} - t_{\mathrm{cur}} \leq -a_{\mathrm{cur}}$: 頂点 v から頂点 u に $-a_{\mathrm{cur}}$ のコストの辺
  - $t_{\mathrm{cur}} - t_{\mathrm{adj}} \leq b_{\mathrm{cur}}$: 頂点 u から頂点 v に b_{cur} のコストの辺

解法

- 作成した有向グラフ上で最短路アルゴリズムを適用する。
    - 負閉路が存在する場合には、条件を満たす t は存在しないので -1
    - そうでない場合には、条件を満たす t が必ず存在する。(次のページへ)

解法

- 負閉路が存在しない場合には、条件を満たす $\mathbf{t}$ が必ず存在する。
  - $\mathbf{t}$ の要素の最小値を $t_{\min}$ 、最大値を $t_{\max}$ とした時に以下の不等式で2要素の差を抑えることができる。
    $t_{\max} - t_{\min} \leq (HW - 1)(\max(|a|, |b|)) \leq 10^9$
  - 最短路アルゴリズムで求めた $\mathbf{t}$ が制約を満たさない場合には、$\mathbf{t}$ の要素の最小値を $t_{\min}$ を定数として全体に加算すれば良い。
    - 既に最短路アルゴリズムを適用した結果なので、
      $t_{\mathrm{adj}} + a_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{cur}} \leq t_{\mathrm{adj}} + b_{\mathrm{cur}}$ は必ず満し、$\mathbf{t}$ に定数を足しても必ず満たす。

解法

- 作成した有向グラフの頂点数は HW、辺の本数は $2H(W-1)+2(H-1)W$ となる。

- ベルマンフォード法で時間計算量: $O(H^2W^2)$ で解くことができる。
  - 負のコストを含む辺が存在する場合があるので、ダイクストラ法を適用できない。

ジャッジ解

- hec: C++ 117 lines, 2.6kB
- hos: C++ 97 lines, 2.6kB
- not: C++ 76 lines, 1.7kB
- tomerun: Java 88 lines, 2.1kB
- tsutaj: C++ 72 lines, 2.0kB

統計

- #AC:
- #Submissions:
- FA: 05: QWE_QWE 21 minutes