



E:マラソンを観よう

原案・データセット：TumoiYorozu

問題文：climpet

解答：TumoiYorozu, beet, hos, climpet, fuppy, kotatsugame, riantkb, tatyam, mtsd

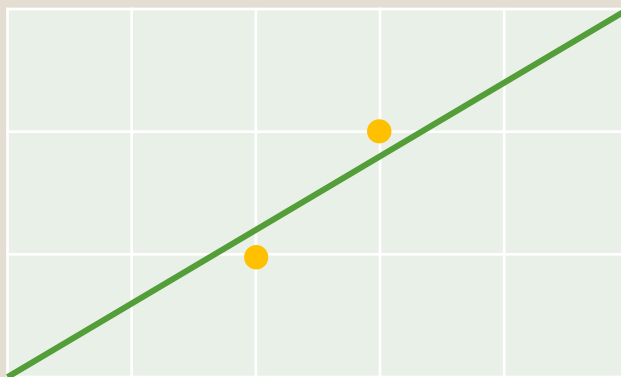
解説：TumoiYorozu

問題概要

- $(0, 0)$ から (a, b) までの線分のマラソンコースがある
- 格子点上で観戦ができる。最もコースに近い格子点を答えよ。
- ただし線分上は含まない。同じ距離のときは x 座標の小さい方

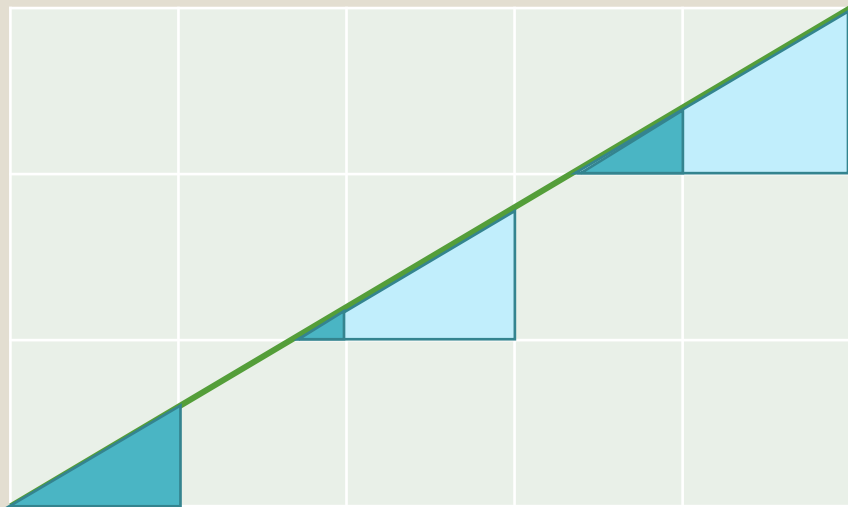
制約

- $1 \leq a, b \leq 10^9$
- テストケース数 300,000



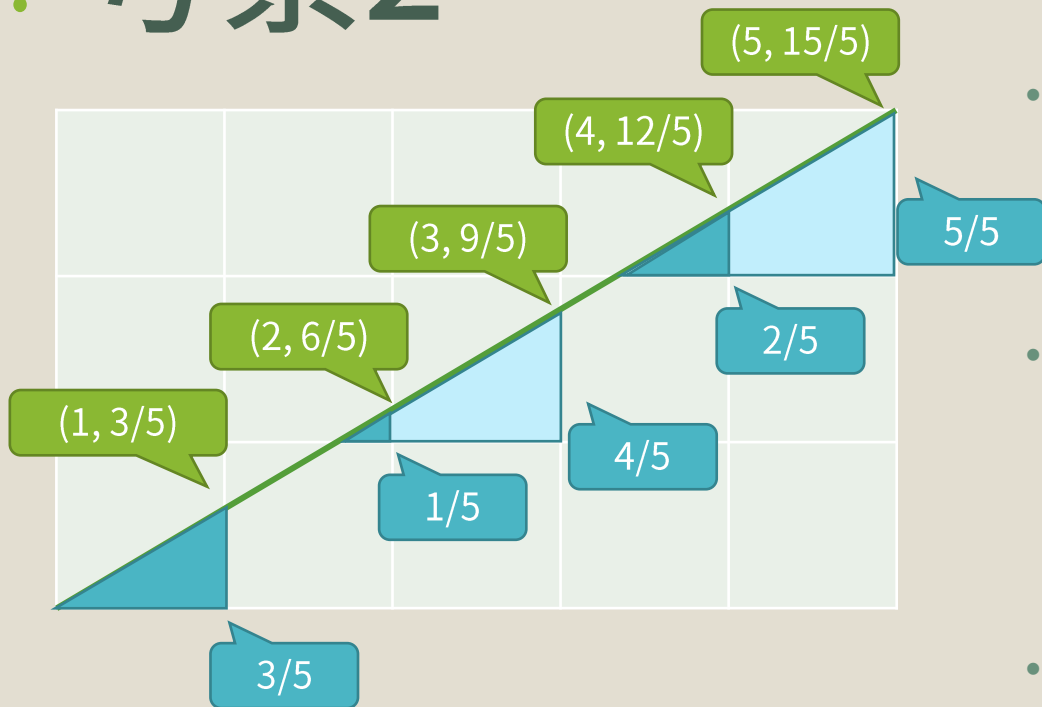
$(a,b)=(5,3)$ の例。 $(2,1), (3,2)$ が最もコースに近い。
 x 座標の小さい $(2, 1)$ が答え

考察1



- a, b が互いに素であるとする。そうでなかった場合は $\gcd(a, b)$ で割っておく
- 格子点から、 x 軸, y 軸を使った三角形を考えると、相似な三角形が現れる。
- この三角形が小さい→線分までの距離も小さい
- よって、最も小さい三角形を求めたい

考察2



- 各、整数 x 座標に対して、線分と交差する点と、三角形の高さは左の通り
- それぞれ 5 倍(=a倍) すると、 $[3, 6, 9, 12, 15]$ になり、三角形の高さはそれらを mod a した $[3, 1, 4, 2, 5(=0)]$ になる
- 一番三角形の高さが小さくなるのは、mod したとき+1になる場所。反対側の三角形も考えると -1 の場所も同じく最小になる。

考察3

- mod したとき 1 になる場所は、

$$x_0 = \frac{a-1}{b} \bmod a$$
$$y_0 = \frac{bx_0 + a - 1}{a}$$

で求められる。対称性から、-1になる場所は $(a - x_0, b - y_0)$

この2点はどちらも線分からの距離が等しい。x座標の小さい方を答える。
立式によっては $a = 1$ のとき等に壊れるので、例外処理をする

考察4

$$x_0 = \frac{a-1}{b} \bmod a$$

を求めるとき、 $b^{-1} \bmod a$ が必要になる。 a, b は互いに素であるため、そのような値は存在するが、 a が素数とは限らないのでフェルマーの小定理 ($b^{a-2} \bmod a$) は使用できない。拡張ユークリッドの互助法で求める必要がある。

Python 3.8以降を使っていれば、`pow(b, -1, a)`で求めることもできる

余談

- 研究活動中にこの問題を解く必要が出てきて、解いた。
面白かったので問題ストックに入れた。
- ~~ちなみにこの研究は先行研究が見つかり、爆破されました~~
- Stern-Brocot tree を使っても解くことができます。
気が向いた人は考えてみてください（最悪ケースで $O(\sqrt{a+b})$ 程度かかるけど）
- JAG メンバーによる事前コンテストでは、Floor Sum を考察に用いていた人もいました。最終提出では使用していませんでしたが、用意しておくとも考察時に使用できるみたいなパターンもありそうです
- mtsd さんが 210sec かけて通せる解法を持ってきたので、テストケース改良で実行に 627分かかるケース群を作りました

ジャツジ解

- TumoiYorozu(C++, cin/cout) :
60行 (1.00 sec)
- TumoiYorozu(Python) :
20行 (2.85 sec)
- hos (C++, scanf/printf) :
53行 (0.24 sec)

```
import math
while True:
    x, y = map(int, input().split())
    if x == 0:
        break
    g = math.gcd(x, y)
    x //= g
    y //= g
    if x == 1:
        print("0 1")
        continue
    a = (x-1) * pow(y, -1, x) % x
    b = (y * a + x - 1) // x
    c = x - a
    d = y - b

    if a < c:
        print(a, b)
    else:
        print(c, d)
```


統計情報

- AC / Trying Teams
 - 34/42
- WA
 - 23
- First Acceptance
 - tonosama (59 minutes)