春コンテスト2015 Problem J
New Game AI

原案：須藤
解答：森，須藤
問題文：矢藤
解説：須藤

問題概要

- 2個のパラメータ hp, dpを持つキャラクタがn体いる
- 適当な順に並び替えて以下の関数に渡す
  - 返り値として選ばれうるキャラクタの数は？

```
int C = <constant integer>;
Character selectTarget(Character v[]){
  int n = length(v);
  int r = 0;
  for(int i=1;i<n;i++){
    if(abs(v[r].hp - v[i].hp) > C){
      if(v[r].hp > v[i].hp) r = i;
    } else {
      if (v[r].dp > v[i].dp) r = i;
    }
  }
  return v[r];
 }
```

hpの差がCより大きければhpで比較

hpの差がC以下ならdpで比較

- 制約
  - n ≦ 50,000　0 ≦ C ≦ 1,000,000,000
  - 0 ≦ hp, dp ≦ 1,000,000,000

解法

- *hp* が最小のキャラクタを M とする
- M との *hp* の差が *C* 以下のキャラクタのうち，*dp* が最小のキャラを S とする
  - *dp* 最小のキャラが複数いる場合は，その中で *hp* が最小のキャラ

- 以下のようにキャラクタを並べると，S は関数の返り値にできる
  - M との *hp* の差が *C* より大きいキャラを全て並べる
  - M を並べる (*hp* での比較により選ばれる)
  - 残るキャラクタのうち S と *dp* が等しいもの以外を並べる
  - S を並べる (*dp* での比較により選ばれる)
  - 残りのキャラ(Sと*dp*が等しいキャラ)を並べる

解法

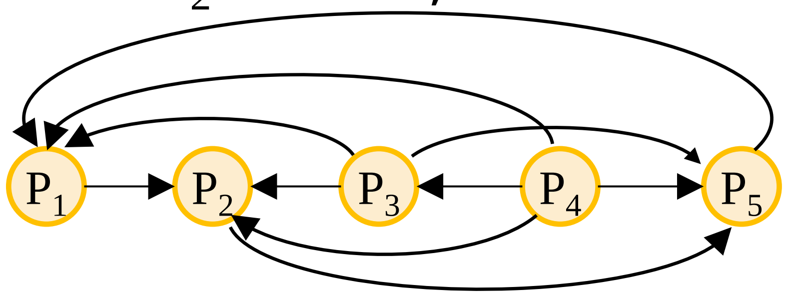
- i 番目のキャラクタを Pi とし，hp と dp を hp_i，dp_i とする
- キャラクタ P_i を返り値にできるとき，
  次の条件を満たすキャラクタは返り値にできる
  - hp が $hp_i - C$ 未満 (hpの比較で選ばれる条件)
  - hp の差が C 以内かつ dp が dp_i 未満 (dpの比較で選ばれる条件)
    - ➢ 条件を満たすキャラクタ以外を P_i が選ばれるように並べる
    - ➢ その後に返り値にしたいキャラクタを並べる
- キャラ P_i に対しキャラ P_k が上記条件を満たすとき，
  頂点 i から頂点 k へ有向辺を張ったグラフを作る
  - キャラ S を始点としてBFSでたどり着けるキャラクタは
    上記の並べ方を繰り返し用いると返り値にできる

解法

- 例 (N = 5, C = 9)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
hp	2	4	7	9	12
dp	14	10	15	19	4

- S はキャラクタ P_2 であり，グラフは次の通り



  - P_2 を選ぶ順: $P_5 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_2$
  - P_5 を選ぶ順: $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5$
  - P_1 を選ぶ順: $P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_1$

解法

- ここまでに上げたキャラ以外は返り値にならない？
  → NO
  - 以下のケース(C=3)は $S=P_2$でグラフ上でP_2から出る枝はないが，P_1とP_4は返り値にできる順番が存在する
    - P_1 を選ぶ順: $P_4 \to P_2 \to P_3 \to P_1$
    - P_4 を選ぶ順: $P_3 \to P_1 \to P_4 \to P_2$

	P_1	P_2	P_3	P_4
hp	2	3	5	6
dp	4	1	4	1

- hp の差が C 以下で dp が等しいキャラを比較したときは，順番が先のキャラクタが選ばれる

解法

- Sを始点としてBFSで辿れるキャラの集合をXとする
  - Xに含まれるキャラが一度でも返り値の候補になると,
    Xに含まれないキャラは返り値になり得ない
    - グラフ上ではXに含まれるキャラへ向かう辺が貼られている
    - Xに含まれるキャラと比較しても返り値にはならない
  - Xに含まれないキャラを返り値にしたい場合は,
    Xに含まれるキャラが返り値の候補にならないよう順序を考える

解法

- 各キャラクタ $x \in X$ に対して，dpが等しく，hpの差がC以下のキャラのうちhpが最大のキャラの集合をYとする
  - Xに属するキャラクタはYに含めない
- Yに属するキャラをhpの昇順に並べるとdpでは降順になる
  - 全ての $y \in Y$ に対し，hpもdpもyより小さい要素はYに含まれない
  - y とhpの差がC以内でdpが等しい要素がXに存在する
  - hpもdpも$y \in Y$より小さい要素はBFSで遷移可能なのでXに含まれる
- Yに属する各キャラが一度は返り値の候補となるようにキャラクタを並べることができる
  - hpの差がC以下のものをグループにまとめる
  - グループをhpの降順に，グループ内の要素はhpの昇順に並べる

解法

- Yの各要素が返り値の候補となっているときに，
  対応するXの要素と比較すると，Xの各要素が
  返り値の候補となるのを阻止することができる
  - 候補になるのを阻止できない要素があれば |X| が答え
- Xに含まれるキャラを除いたキャラ集合に対して，
  新たにSを選びBFSで遷移できるキャラは返り値にできる
  - Xに含まれるキャラは先にYの要素で阻止しておく
  - BFSの遷移中にYの要素が現れる場合は，
    要素が現れた段階で対応するXの要素を阻止する
  - 返り値にする並べ方は先の説明に準拠

- 新たに返り値にできたキャラをXに加える操作を繰り返し，
  Xが更新できなくなったときの |X| が答えとなる

計算量

- キャラクタはhpとdpの組の昇順に並べておく：O($n$log$n$)
- 各キャラについて対応するYの要素となるキャラを調べる
  - キャラクタをdpの値で分類すればしゃくとり法でO(n)
- 始点Sとなるキャラクタを見つけ，BFSをする
  - 指定した区間のキャラクタについて， dpが最小の
    キャラクタをとれるセグメントツリーを使うとO($n$log$n$)
    - 区間の最小値とインデックスを取れるセグメントツリーを書く
    - 訪問済みのキャラクタはdpを十分大きい値にする
    - 各キャラは1回しか訪問されないのでO($n$log$n$)

- 全体でO($n$log$n$)

ジャッジ解

- 森　：190行(5,335B), C++
- 須藤：158行(3,568B), C++