G: Human Seperation

原案: potetisensei, sortreew

解法: potetisensei, sortreew

テスト: sortreew, nuip, camypaper, yosupot

問題

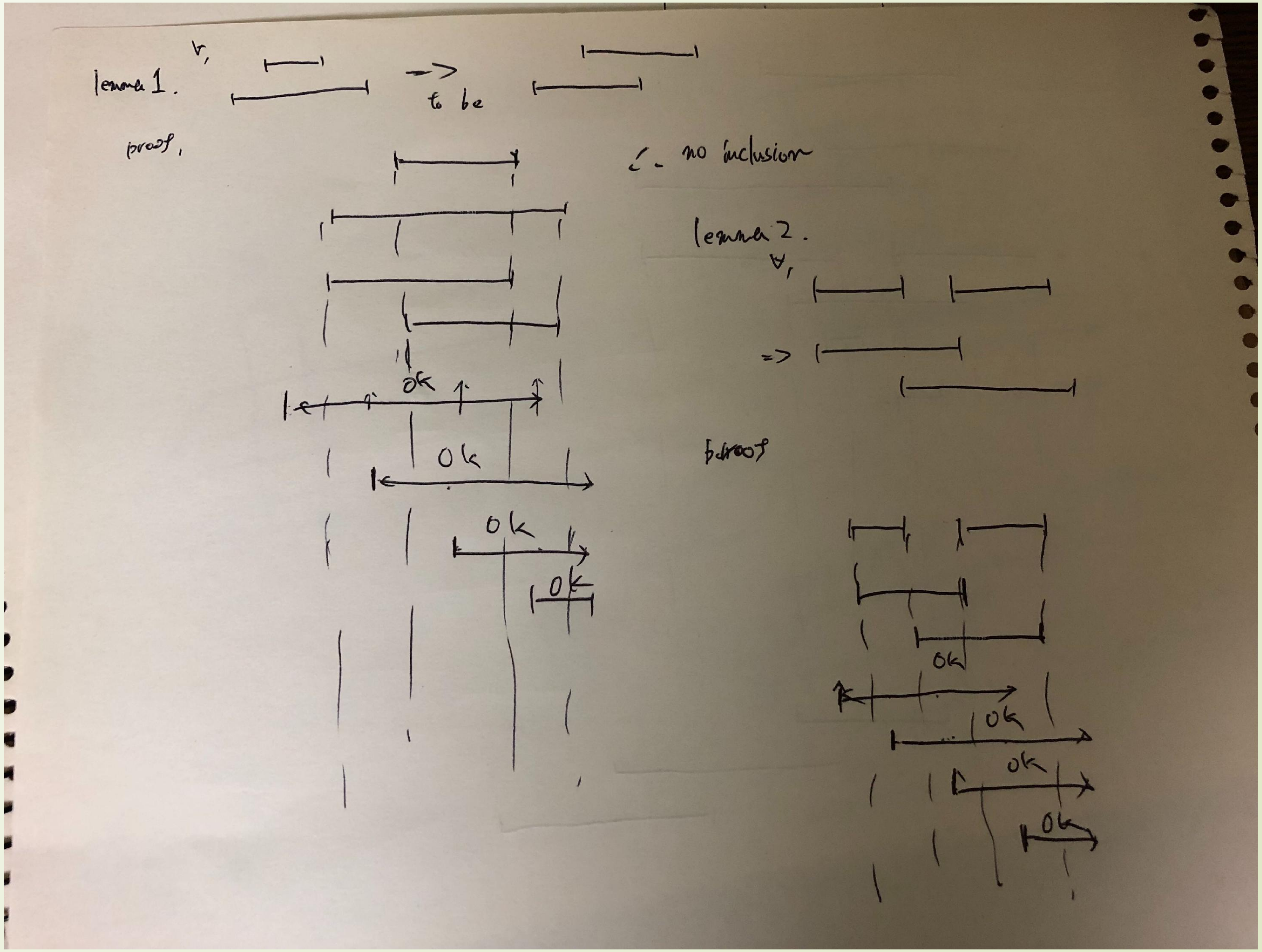
円周上の2点がペアとしてN個与えられる。平面上に直線を任意に引ける。全てのペアについて、2点が少なくとも1つの直線によって分離されている状態にしたい。最小で直線は何本必要か。

考察

- 円環はとりあえず切ったほうが良さそうなので切ってみる。言い換えると問題は
  - 区間がN個与えられる。2点のペアを好きな数足して良い。各区間について、2点の内1点だけが含まれているようなペアが少なくとも1つ存在するようにしたい。このためにはペアはいくつ追加するべきか。
- 以降、入力で与えられる区間と直線を追加することによって増える区間の区別が面倒なので、入力側を区間、追加する側を直線区間と呼ぶことにする

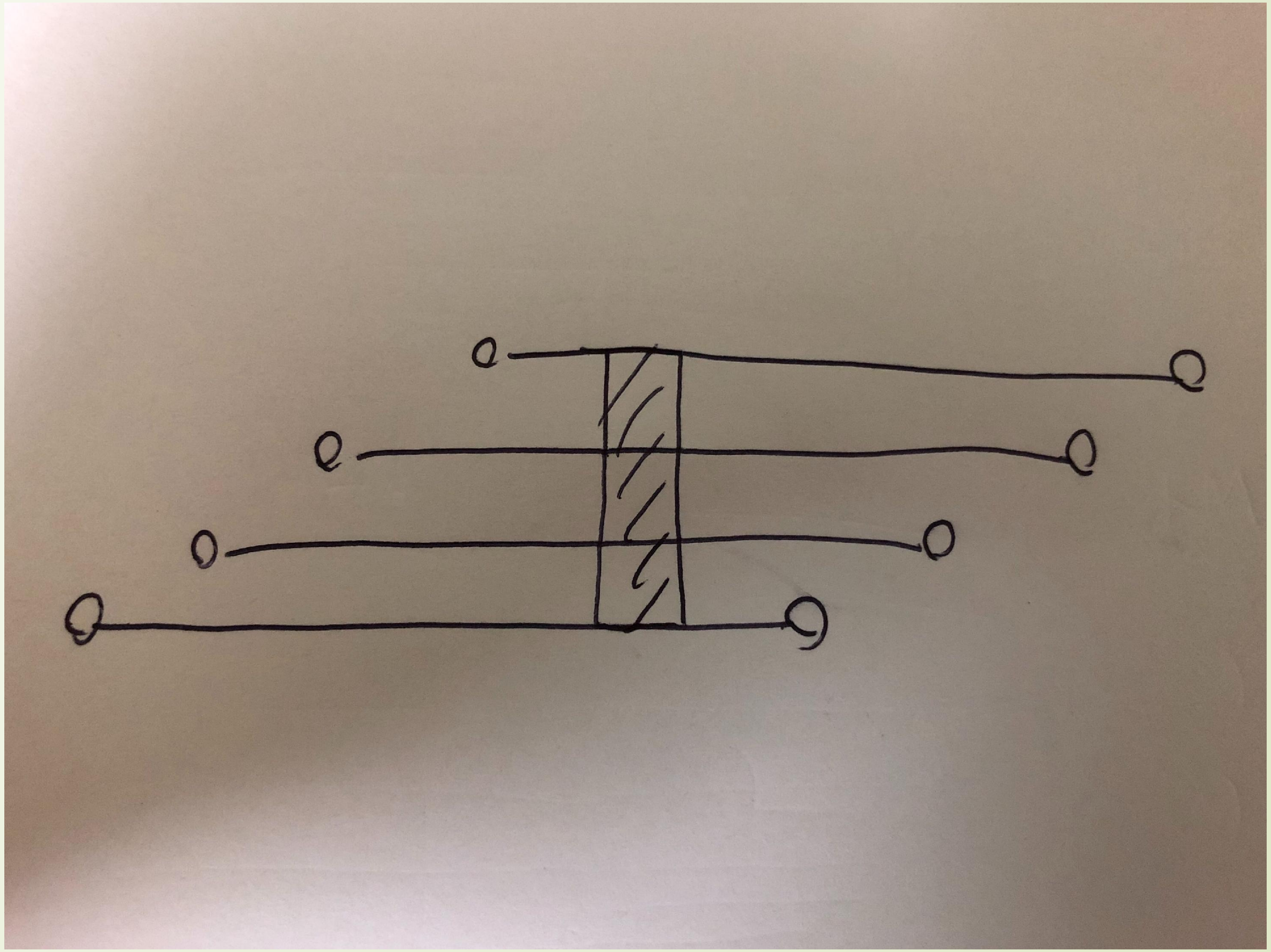
最適解の条件？

- この問題に対して、適当な実行可能解が与えられたとする
  - Lemma1. 実行可能解が含む2つの直線区間について、一方が他方を真に含んでしまうならば、2区間の端点を交換したほうが解が良くなる
  - Lemma2. 実行可能解が含む2つの直線区間について、それらが交わっていないならば、交わるように2区間の端点を交換した方が解が良くなる



最適なペアリング

- 以上のlemmaを使うと、「追加するペアに用いる点」が全て固定されている状態では、それらの中での最適なペアリングは以下のような組み方であるとわかる



最適な点？

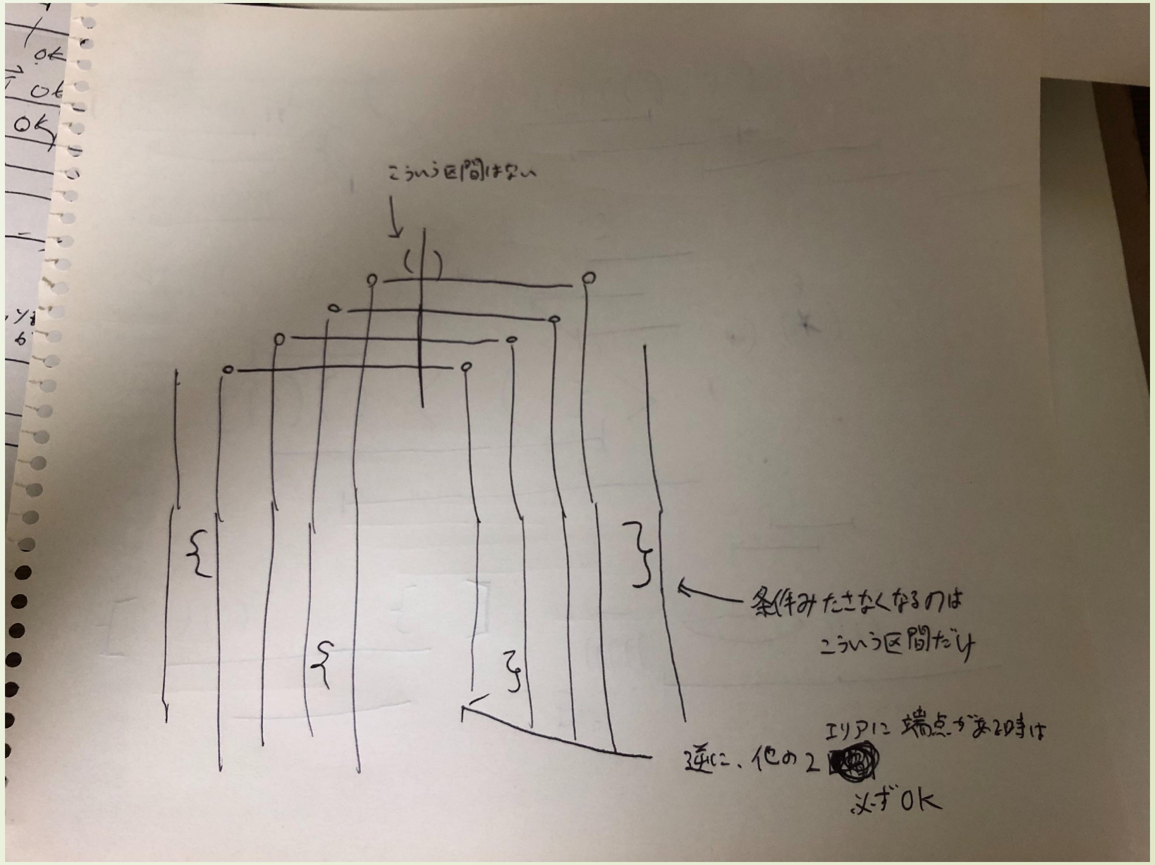
- 使う点のセットが固定されれば、最適なペアリングの仕方は一意
- ではどのような点でペアリングを作るべきか？
- ここで別の問題を解くことにしてみます（唐突）
  - N 個の区間が与えられます。任意に点を置くことが出来ます。各区間について、点が少なくとも1つ含まれているようにしたいです。最小何点でこれを満たすことが出来ますか
  - これは適当な貪欲法で解けます
  - この問題の最適解をP、元の問題の最適解をSとします

定理

- Theorem 1. P <= 2S
  - 元の問題の最適解を持ってきて、それらの直線区間の端点をバラすとそれは点の問題の実行可能解。なので2SはP以上。

定理

- Theorem 2. S <= floor(P/2) + 1
  - 点の問題の最適解を適当に持ってきて、2ページ前で紹介した最適なペアリングをする。ただし、Pが奇数の場合には、真ん中の1点を残して他の偶数個の点でペアリングをする。
  - このようにペアリングしても、元の問題の実行可能解にならない場合がある。というのは、右の図のように、全てのペアを真に含んでしまうような区間があるとアウト(あるいは、元々Pが奇数でもアウト)。
  - これらの場合には直線区間を足す必要がある。逆に、1つ足してしまえば十分。
    - 中央に1点、無限遠点に1点作り、それらの間でペアを作る。
  - 以上からたかだかfloor(P/2)+1で抑えられる。



奇数の時

- P <= 2S ⇔ P/2 <= S だから、Pが奇数ならば、ceil(P/2) <= Sである。
- 他方、S <= floor(P/2) + 1 = ceil(P/2)であるから、S = ceil(P/2)が言える。
- したがって、点の問題を解いた時、最適解が奇数なら、この値を出力するだけでよい。

偶数の時

- 偶数のときは、S = P/2 または S = P/2 + 1の2通りが存在する。
  - +1がつくかどうかは、「点の問題の最適解の、全ての点を含んでしまうような区間が存在するか」によって決まるはず
  - これはつまり、持ってくる点の問題の最適解によっては、+1が発生しないこともありえる
  - したがって、点の問題を貪欲的に解くだけでは判定として不十分

判定

- 結局判定のために必要なのは、「点の問題の最適解を、最左の点をある位置に固定して構成する。この時、最右の点はどれだけ右に取れるか」を全ての固定した位置に対して調べること
- ここで、冷静に考えてみる
  - 点の問題を解く貪欲法では、ある位置に点置いた後、次に置く点の位置というのは一意に定まっている
  - また、貪欲法によって求まる解は、「（出来るだけ点を置くタイミングを遅延させているわけなので）点を全て最大限右端に寄せた解」になっているはず
- 以上の考察から、貪欲法では実際に点を置く場所を数直線を走査しながら判明させていくだけだったが、やろうと思えば「最左をある位置に固定した時の、点を全て最大限右端に寄せた解」が作れるのではないか

判定

- 実際にこれはdpのような形で出来る。
  - dp[i] := （座標圧縮した）座標 i に対して点を置いて、「i以降から開始するような区間以外」は全て対処している時、今までで置く必要のあった点の最小個数
  - としつつ、付加情報として、「dp[i]を与える最適な置き方をする時、左端の点はどこに置かれたか」を持たせる（前述の通り、このdpは遷移元が1通りしかないので、左端の点の位置は一意に定まっている）
  - このようにして計算したdpの値を元に、全ての点の問題の最適解について+1が発生するかの判定ができる。
- 以上から、この問題は全体で O(NlogN) で解くことが出来た

余談

- O(NlogN)の解法ではdp的な工夫によって点の問題の最適解を複数考慮する必要があった
  - 実際、単に貪欲法で構成した解のみ考慮しても普通はWrong Answerになる
- しかし、円環を切り開く位置を全て試すと、貪欲法で構成した解のみで十分であることが言える
  - もちろん全て試すにはO(N^2)かかるため、普通はTLEする
- そこで、TLEギリギリまで色々な場所で円環を切り開いて、貪欲法で構成した解を試すことにし、最も良かった値を使うことにする
- 結果: このように工夫した嘘解法は強すぎて落とせませんでした！！！