

JAG ICPC模擬国内予選2024

C: 星間広告計画

原案 : climpet

問題文 : pachicobue

データセット : climpet

解答 : climpet, hos, pachicobue, potato167, riantkb, tatyam, tempura

解説 : climpet

問題概要

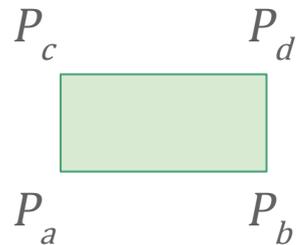
- 3次元空間上の N 点 P_1, \dots, P_N が与えられる。
- このうち 4 点を頂点とする長方形はいくつある？

制約

- $N \leq 1500$

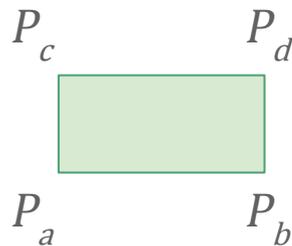
解法1: 4乗時間解法 (TLE)

- 4点 P_a, P_b, P_c, P_d を全列挙し、長方形となっているか確かめる。
- さすがに6分では間に合わないと思います。



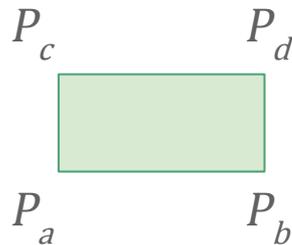
解法2: 3乗時間解法

- 3点 P_a, P_b, P_c を全列挙し、 $\angle P_b P_a P_c$ が直角かを判定する。
- 残りの頂点 P_d の座標は一意に定まるので、その座標に点があるかを二分探索などで判定する。
- この方法だと各長方形を8回ずつ数えることになるので、最後に8で割る。
 - 割り切れない場合は何かが間違っています。
- なお、直角の判定は $\overrightarrow{P_a P_b} \cdot \overrightarrow{P_a P_c} = 0$ で行える。
 - オーバーフローに注意しましょう。



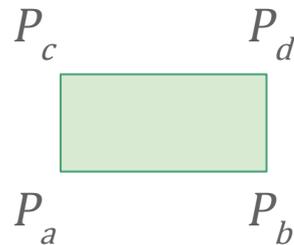
解法2: 3乗時間解法

- 今回用意した入力ファイルの場合、2分くらいで実行が終わることを確認しています。
 - コードによってはもっとかかる場合もあるので、無駄の少なそうな書き方を心がけましょう。
 - CやC++の場合は最適化オプションをお忘れなく。



解法3: 3乗時間解法 (定数倍高速化)

- 先ほどの解法では同じ長方形を複数回数えてしまうことになり、無駄がある。
- 重複を避けるため、頂点番号に以下の制約を設けることにする。
 - 4頂点のうち、最も番号の小さいものを P_a とする。
 - P_a に隣接する2頂点のうち、番号の小さい方を P_b , 大きい方を P_c とする。
- このとき、以下の2つの不等式が成り立つ。
 - $a < b < c$
 - $a < d$
- 1番目の不等式を満たす整数 (a, b, c) の組は約 $N^3/6$ 個しかないため、6倍の高速化となる。
 - 2番目の不等式の判定をお忘れなく。
- この方法だと実行が15秒くらいで終わることを確認しています。



解法3の誤答例

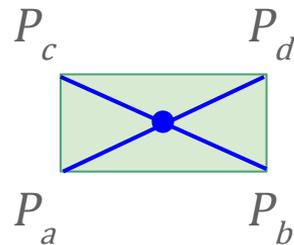
- 解法3において、2番目の不等式の判定を行わずに誤答となったチームがちらほら見られました。
- 例えば以下のケースで、同じ長方形を2回数えてしまうことになります。

4
0 0 0
1 1 0
0 1 0
1 0 0

- 実は入力をソートしておくとお通る誤答もそれなりにありました。

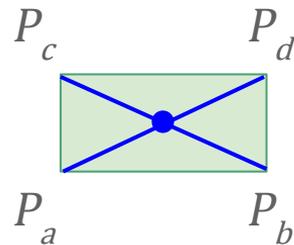
解法4: 対角線に着目

- 四角形が長方形であるための必要十分条件は、長さの等しい対角線が互いの中点で交わることである。
- そこで、2点間を結ぶすべての線分について(長さ, 中点の座標)を列挙し、これらが等しいもののペアを数えればよい。
 - なお、対角線が交わる(つまりねじれの位置にない)という条件から、4点が同一平面上に存在することが保証できる。したがって、同一平面上にあるかどうかを陽に判定する必要はない。



解法4: 対角線に着目

- 実装上は、線分の長さの2乗および中点の座標の2倍を用いることで、すべてを整数演算で済ませることができる。すなわち、2点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ および $P_j(x_j, y_j, z_j)$ について、以下の4つ組を求めておくことになる。
 - $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ (オーバーフローに注意)
 - $x_i + x_j$
 - $y_i + y_j$
 - $z_i + z_j$
- これらの4つ組を全列挙後ソートし、等しいペアを数え上げる。
map などのデータ構造を用いてもよい。
- 計算量は全体で $O(N^2 \log N)$ などとなる。
- なお、浮動小数点数では精度が足りず誤答となることがある。



余談

- 当初は $N \leq 5000$ 程度にして 3 乗時間解法は基本的に落とす予定でしたが、難易度調整の結果現在の制約になりました。
- 類問として、5 月末の yukicoder で 2 次元でのひし形の数え上げが出題されています。
 - なお、本問題が模擬国内予選に採択されたのは 5 月中旬であり、パクったわけではないです。

統計情報

- AC / trying teams
 - 90 / 101
- First Acceptance
 - WADATSUMI (0:13:18)