

JAG ICPC模擬国内予選2024

D: 過去問の共有

原案 : climpet

問題文 : tsutaj

データセット : tempura

解答 : climpet, hos, hotman, potato167, riantkb, smiken, tatyam, tempura, tsutaj

解説 : climpet

問題概要

- N 人の人がいる。 i 番目の人は集合 S_i を持っている。はじめ、 $S_i = \{i\}$ である。
- M 個の番号対 (a_i, b_i) が与えられる。
- K 回のイベントが発生する。各イベントでは次の処理を行う。最終的な $|S_1|$ の期待値を、 $\text{mod } 998244353$ で求めよ。
 - M 個の整数対から (a, b) をランダムに 1 つ選ぶ。 S_a および S_b を $S_a \cup S_b$ で更新する。

制約

- $N \leq 10$
- $M \leq N(N - 1)/2$
- $K \leq 50$

想定解法

- 最終的な $|S_1|$ の期待値は、次のように言い換えることができる。
 - 各 $x = 1, \dots, N$ について $x \in S_1$ である確率を求めたとき、その総和。
- つまり、各 x について独立に確率を計算し、最後に足し算すればよい。
- 各 x について独立に、以下のような bit DP を(計 N 回)行う。
 - $dp_{x,t}[C] = (t$ 回のイベントの後、 x を持っているような人の集合が C である確率)
 - 初期値: $dp_{x,0}[\{x\}] = 1$, それ以外は 0
 - 遷移: 各整数 $t (0 \leq t < K)$, 集合 $C (C \subseteq \{1, \dots, N\})$, および整数対 (a, b) について、
 - $a \in C$ または $b \in C$ ならば、 $dp_{x,t+1}[C \cup \{a, b\}]$ に $dp_{x,t}[C] / M$ を加算。
 - それ以外の場合、 $dp_{x,t+1}[C]$ に $dp_{x,t}[C] / M$ を加算。
 - 最終的に、 $1 \in C$ であるような集合 C について、 $dp_{x,K}[C]$ の総和を求める。
- 計算量は全体で $O(2^N N M K)$ 時間などで実装できる。

発展：想定解法的高速化

- 先程の解法では bit DP を N 回独立に行っていた。
- ところで、初期値を除き、DP の遷移は x によらず同じ (線形な) 計算を行うことになる。さらに、最後に求めるのは単なる総和である。
- 実は、 N 個分の足し算を最後に行う代わりに、最初から初期値として足してしまっても同じ答えになる。つまり、各 x について独立に DP を行うのではなく、すべての x について初期値を $dp_0[\{x\}] = 1$ とし、DP を 1 回だけ行えばよい。
- 計算量は $O(2^N MK)$ 時間に改善できる。

- このほか、 $O(2^N (M + NK))$ 時間の解法もあるとのこと。

補足

- この問題では mod 素数 での四則演算が必要となります。取り扱いに慣れておきましょう。
- 今年の競技ルールでは、AtCoder Library などの外部ライブラリが利用可能となっています。C++ の場合は [<atcoder/modint>](#) などを使うと実装量が減って便利です。

余談

- 入力例 2 において, あなたには友達はいない. したがって, あなたに過去問を共有してくれる人はいない.
 - 類題(?): [第9回日本情報オリンピック 予選3](#)

統計情報

- AC / trying teams
 - 48 / 48
- First Acceptance
 - 全体: hitoyayode (0:10:39)
 - 現役: Magical Fish (0:13:40)