

模擬地区予選2014 F問題

# Reverse A Road II

原案：荒木

問題文：井上

解答：井上・大槻・保坂・森

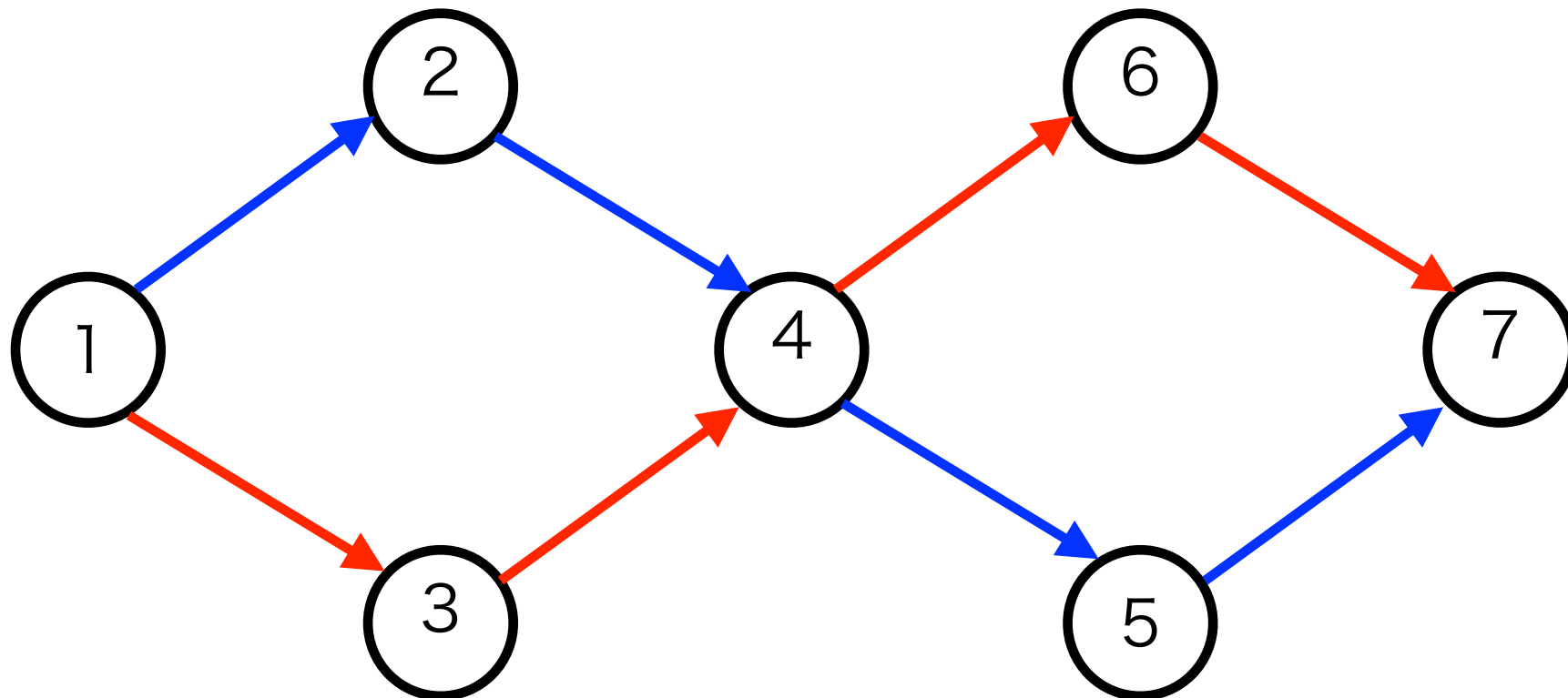
解説：井上

# 問題概要

- ・ 一方通行の道路網でSからTへ行く辺素パスの本数を既に最大化している
- ・ 今、1本だけ辺を逆向きにしてもよい
- ・ S-T辺素パスの本数を増やせるか？増やせるなら、増やせる辺の候補は何本あるか？
- ・ 制約: 頂点数 $\leq 1000$ , 辺数 $\leq 10000$

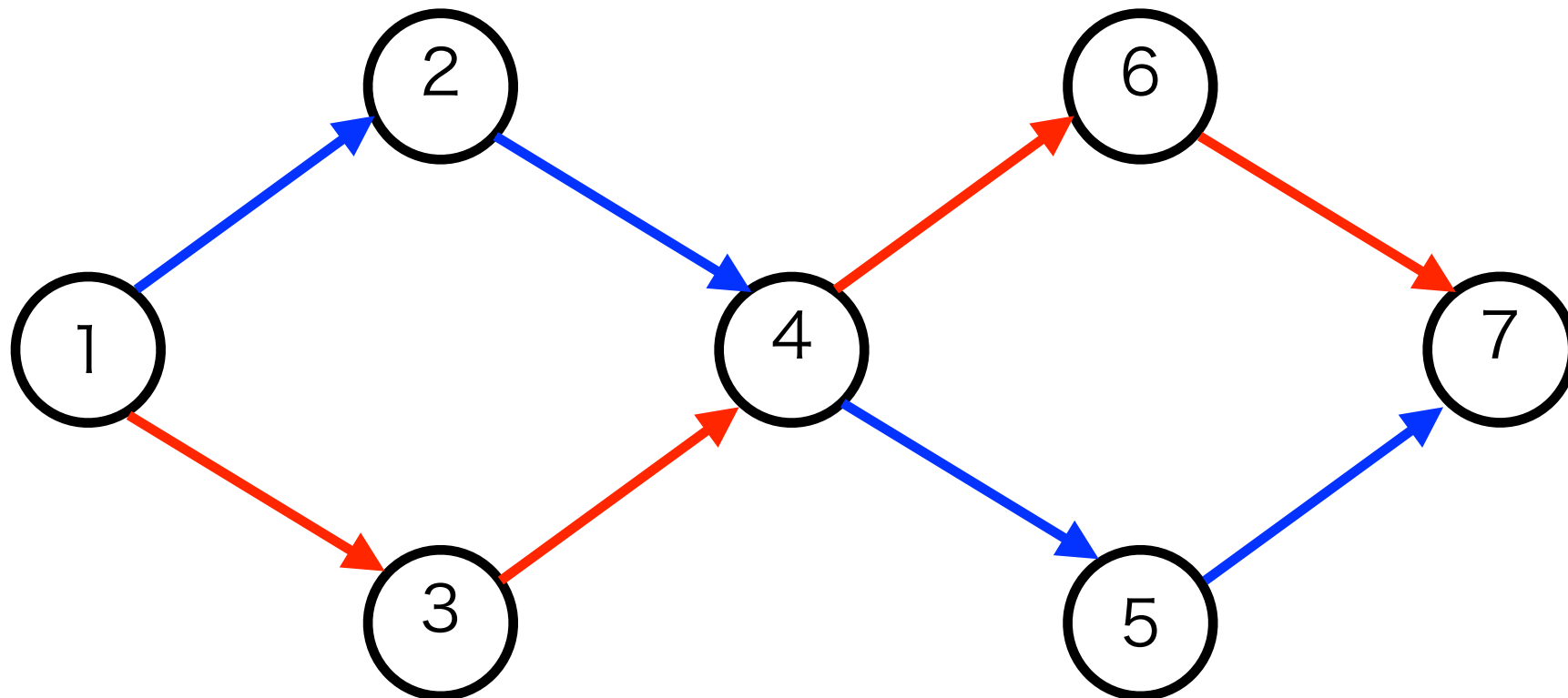
# S-T辺素パス

- ・ SからTへ向かう、辺を共有しないパス集合
- ・ S-T辺素パスは、辺の容量を1としたグラフのS-T最大流で解くことができる



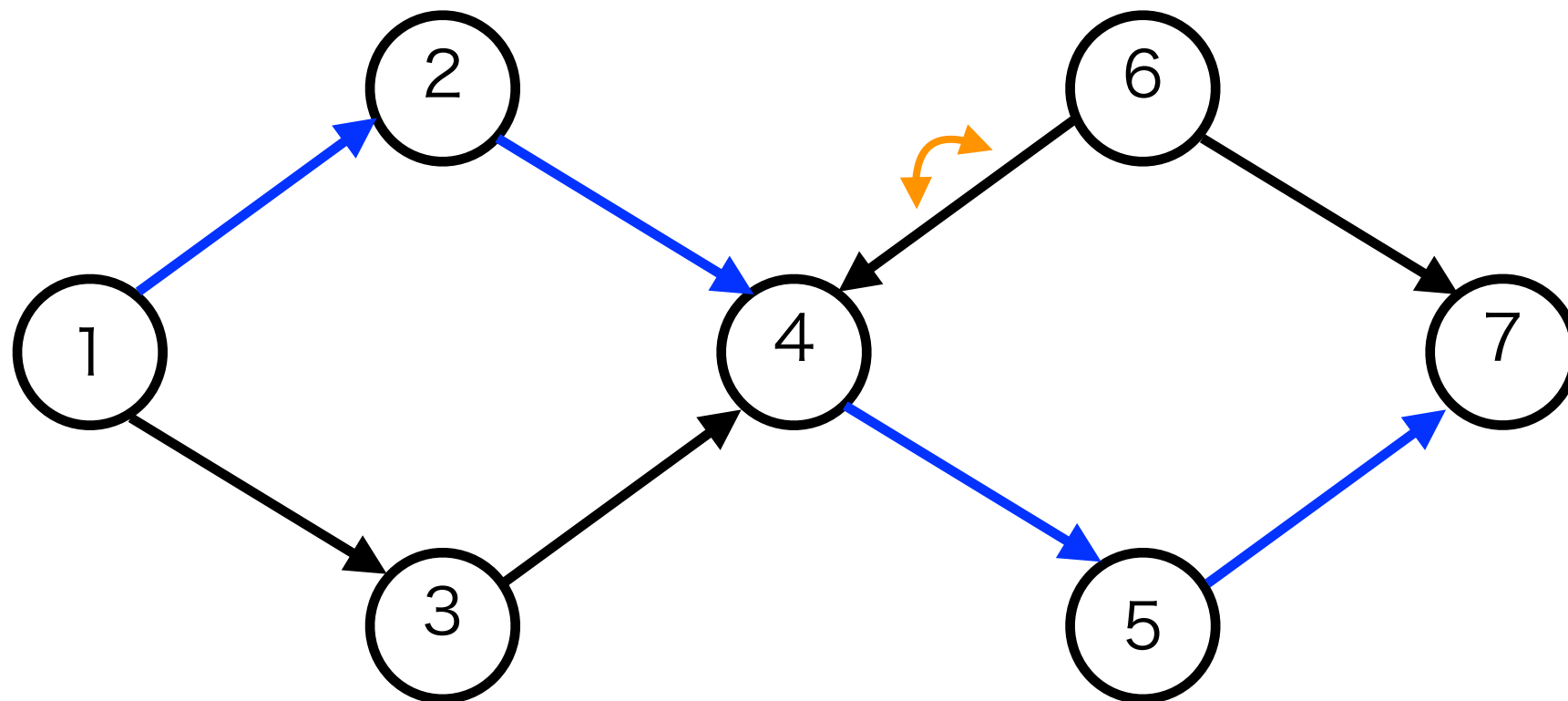
# 最大流

- ・ S-T最大流によって、現在の辺素パスの最大がわかる
- ・ 最大流問題を解くアルゴリズムはいろいろある
  - ・ Ford-Fulkerson:  $O(FE)$
  - ・ Dinic:  $O(EV^2)$ 
    - ・ 容量が1だと  $O(\min\{V^{2/3}, E^{1/2}\}E)$  になる



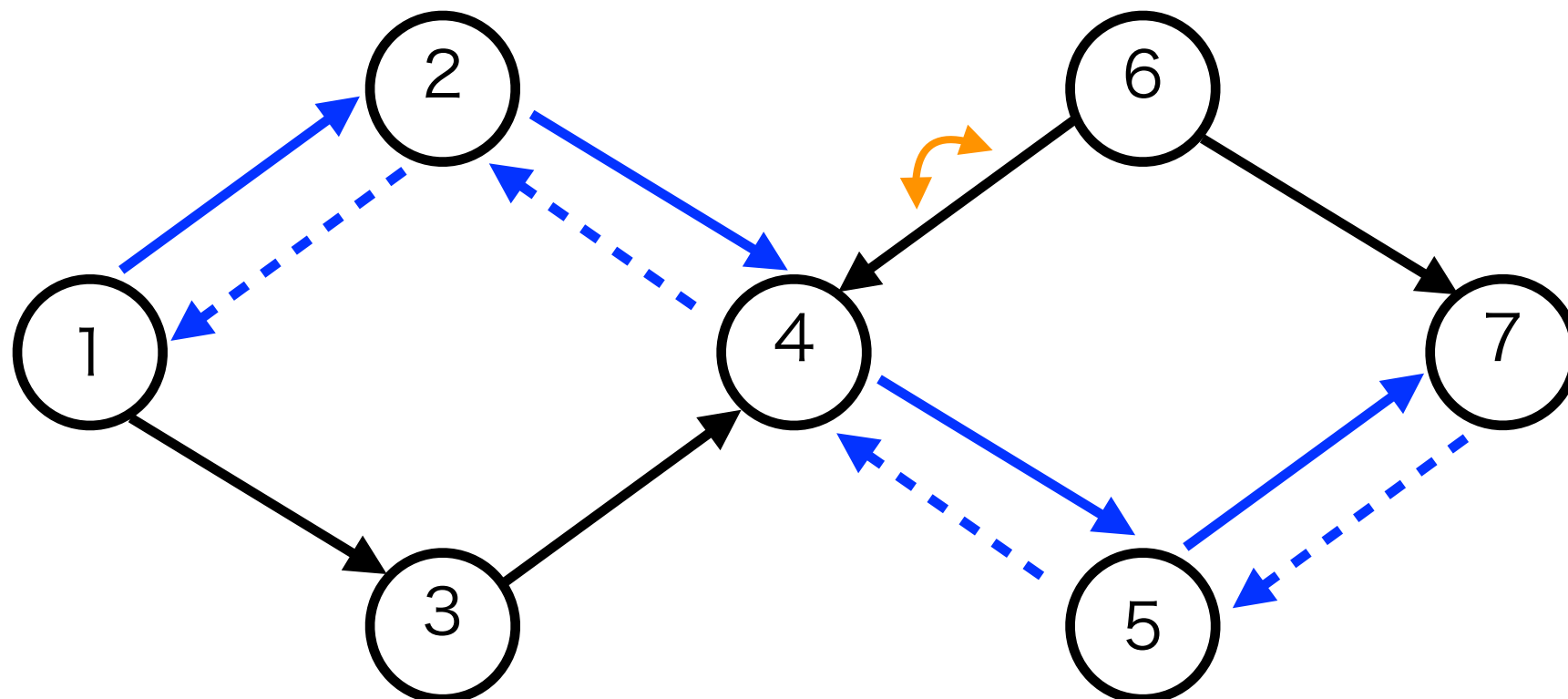
# 想定TLE解法

- ・ 全ての辺を反転してみて、フローを流しまくる
- ・ Dinicで $O(E * E^{3/2})$ 
  - ・ フロー速いけどさすがに間に合わない



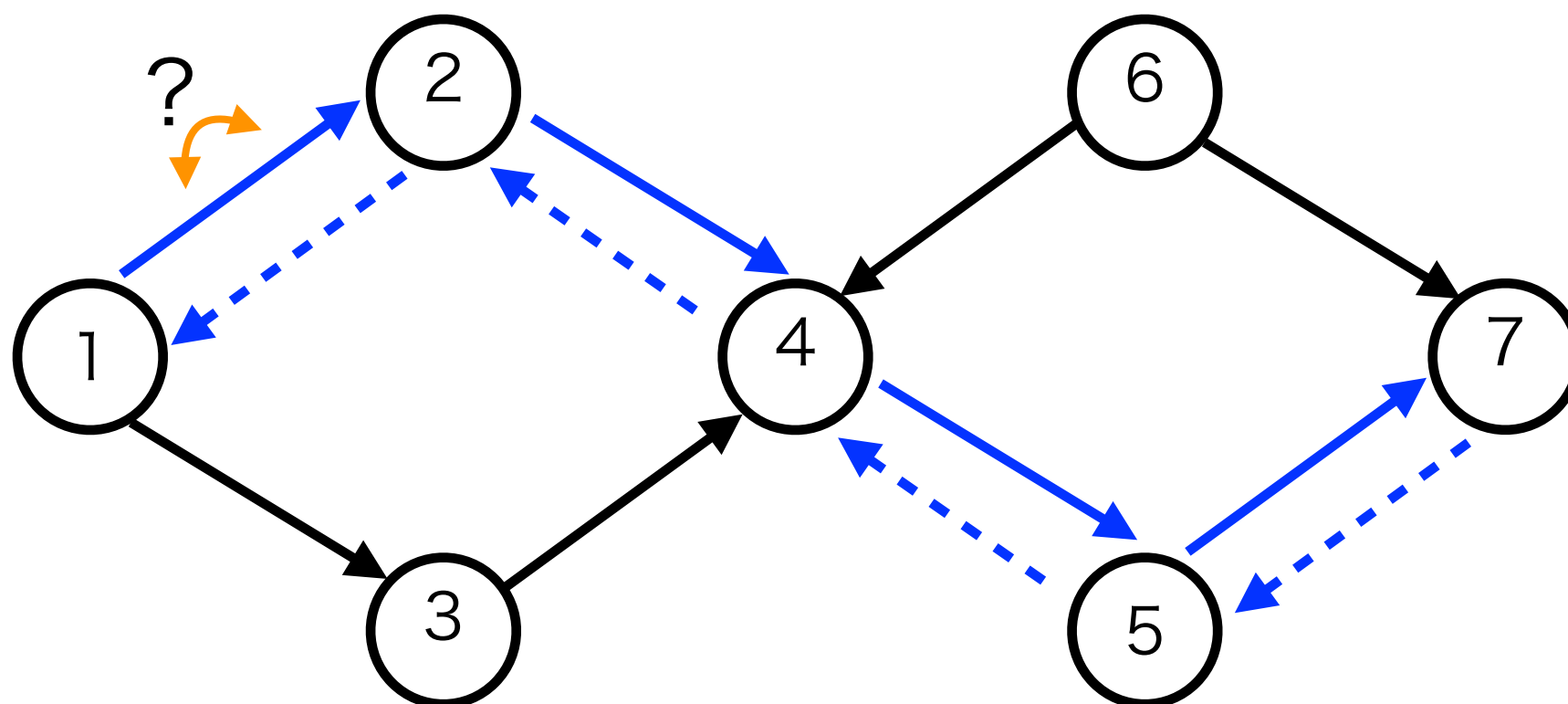
# 観察

- ・ 容量1なので、辺1本の変更では最大流は高々1しか増えない
- ・ 最大流を流した後の残余グラフにおいて、辺を反転することでS-Tパスが増えればフローが増える



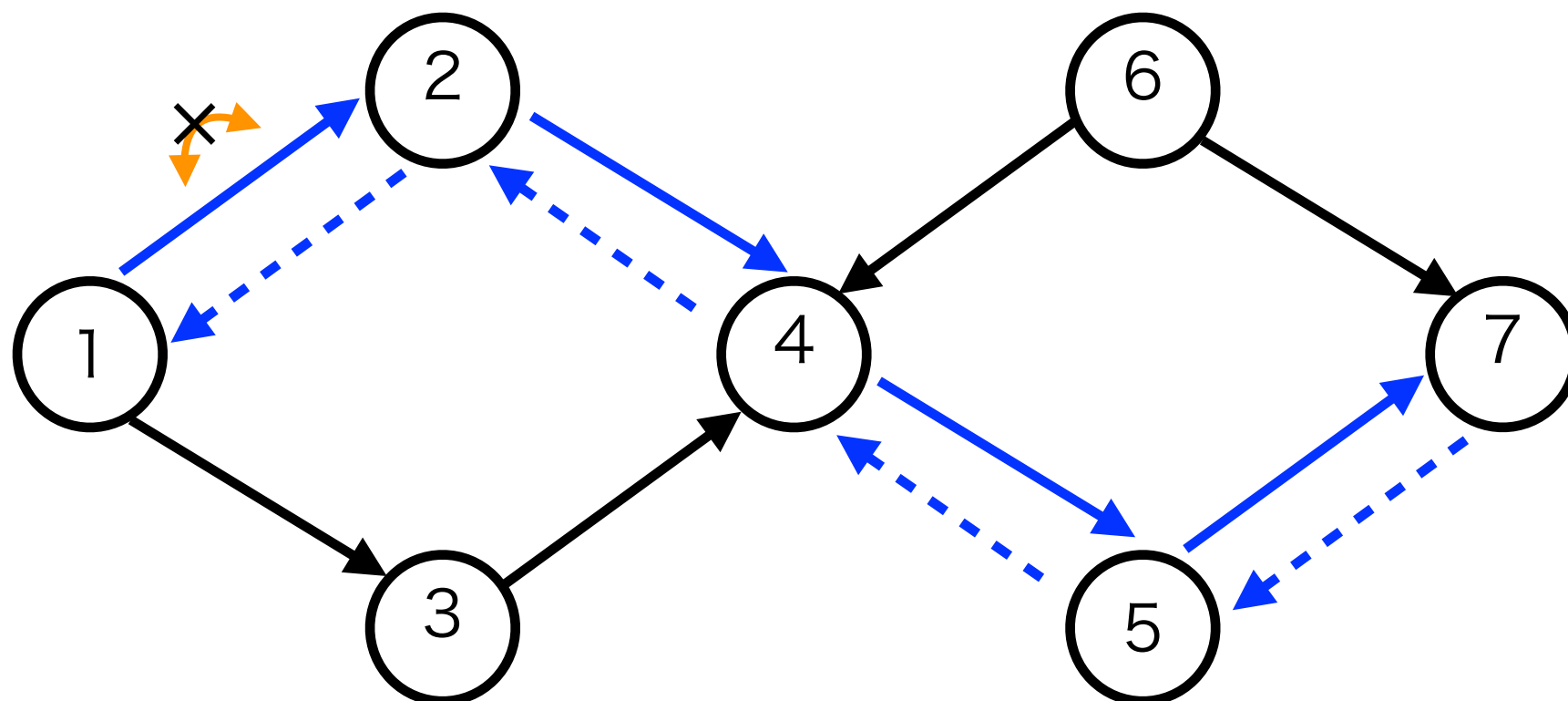
# 疑問

- ・ すでにフローに使っている辺はどうする？
- ・ 辺を反転するごとにS-Tパスを探索すると $O(E^*E)$ になって怪しい？



# 既に使っている辺の処理

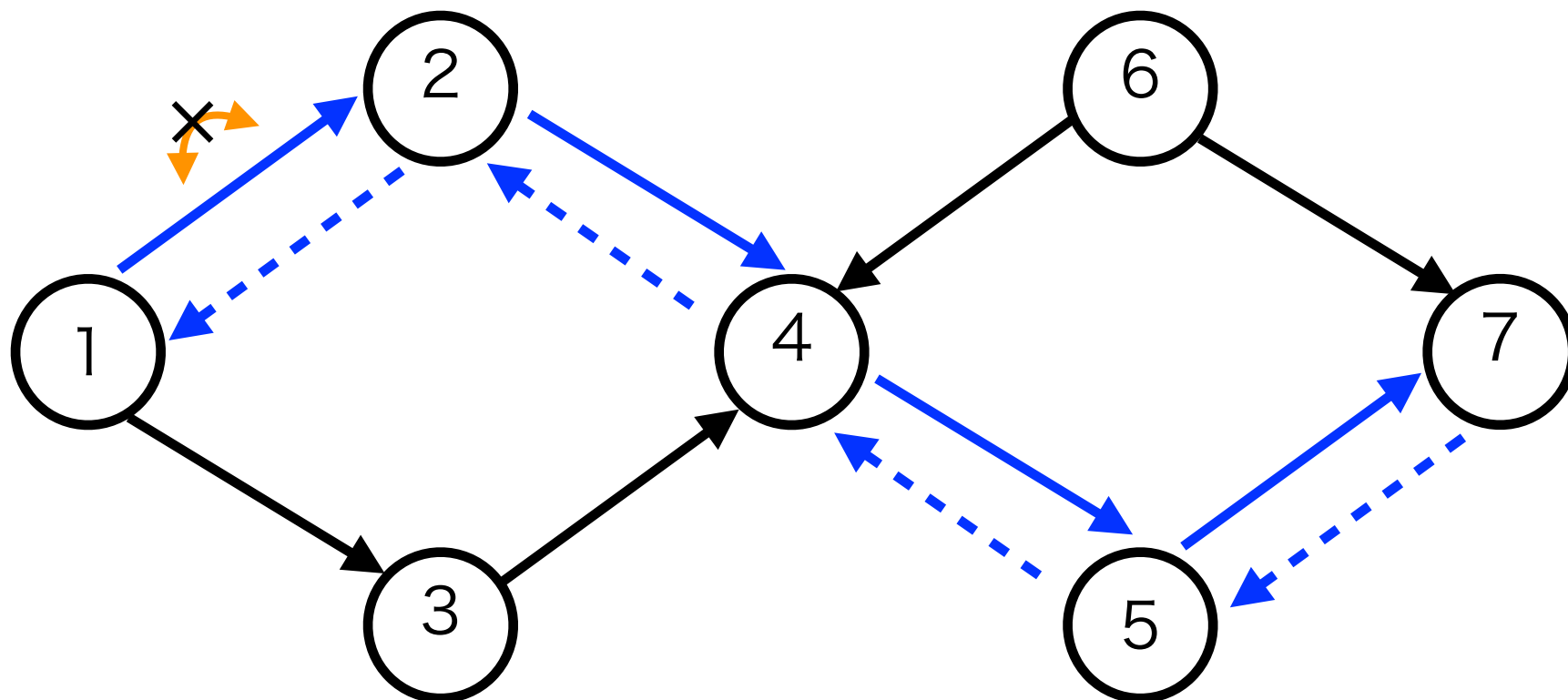
- ・ すでに使っている辺は反転してもフローは増えないので無視してよい
- ・ 最大流-最小カット定理からわかる
  - ・ 反転しようとしている辺は最小カットに含まれる
  - ・ 反転後もそこを切れば最小カットは増やさずに切れる





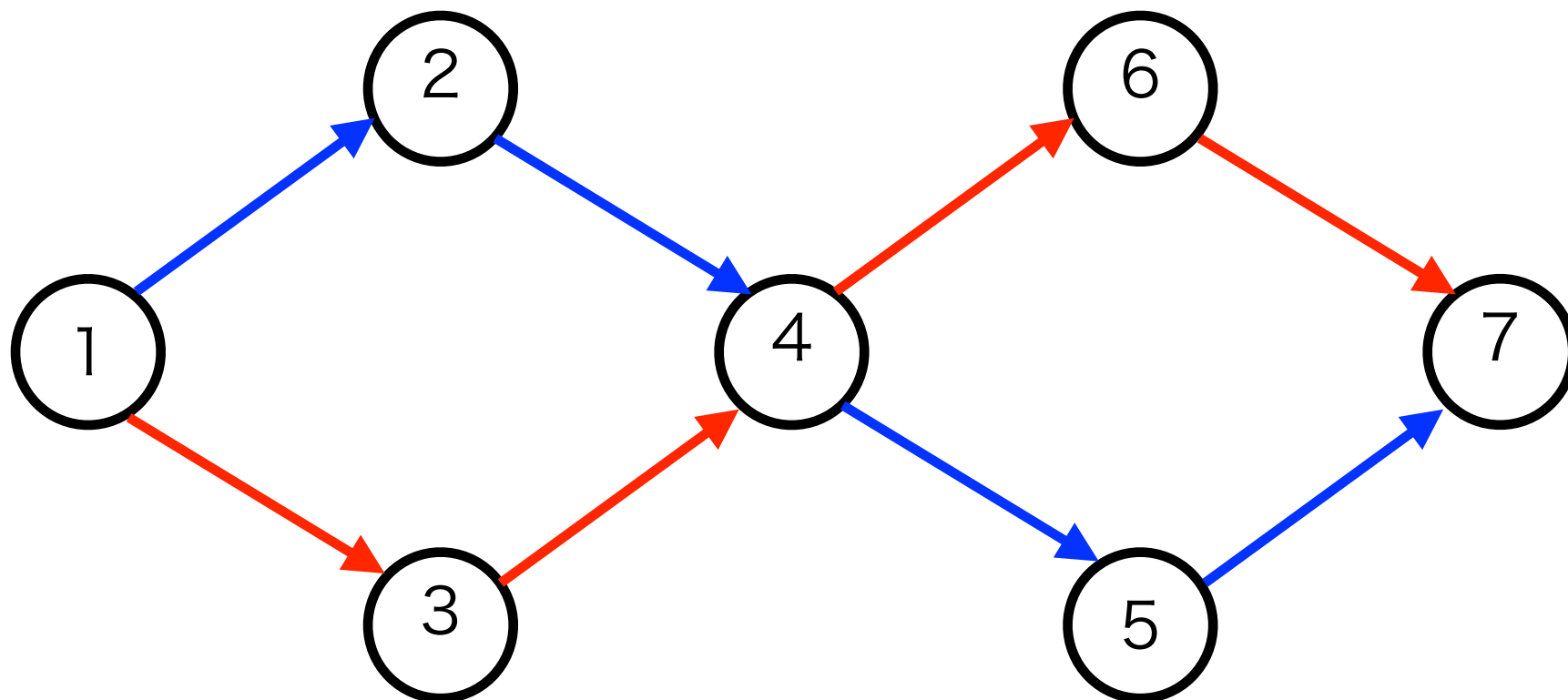
# S-Tパスの有無チェック

- 有向辺 $e=(u,v)$ を使うとS-Tパスが増える  
⇔ Sからuに行くパスとvからTに行くパスが両方ある
- 事前にSから行ける頂点集合XとTへ行ける頂点集合YをDFSで求める:  $O(V+E)$
- すべての辺 $e=(u,v)$ について、 $v \in X$ かつ $u \in Y$ か調べる:  $O(1)$



# 解法まとめ

- ・ 容量1の有向グラフを作り、最大流を流す:  $O(E^{3/2})$
- ・ 残余グラフでSから行ける頂点集合XとTへ行ける頂点集合Yを求める:  $O(E)$
- ・ 残余グラフで使っていないすべての辺 $e=(u,v)$ について、 $v \in X$ かつ $u \in Y$ か調べる: 各 $O(1)$ 、全体 $O(E)$
- ・ 全体で $O(E^{3/2})$



# ジヤツジ解

- ・ 井上：119行, 2106バイト (C++)
- ・ 大槻：144行, 3706バイト (C++)
- ・ 保坂：131行, 2946バイト (Java)
- ・ 森：169行, 4593バイト (C++)

# 解答状況

- # of Challenge Teams:  
14 チーム
- Accepted Rate (AC/Submit):  
33 % ( 13 / 40 )
- First Acceptance:  
ゴディバのチョコをください (無理難題) (72:30)