



模擬地区予選2013 Problem G

Floating Islands

原案：須藤

解答：須藤、薮、保坂

解説：須藤





問題概要

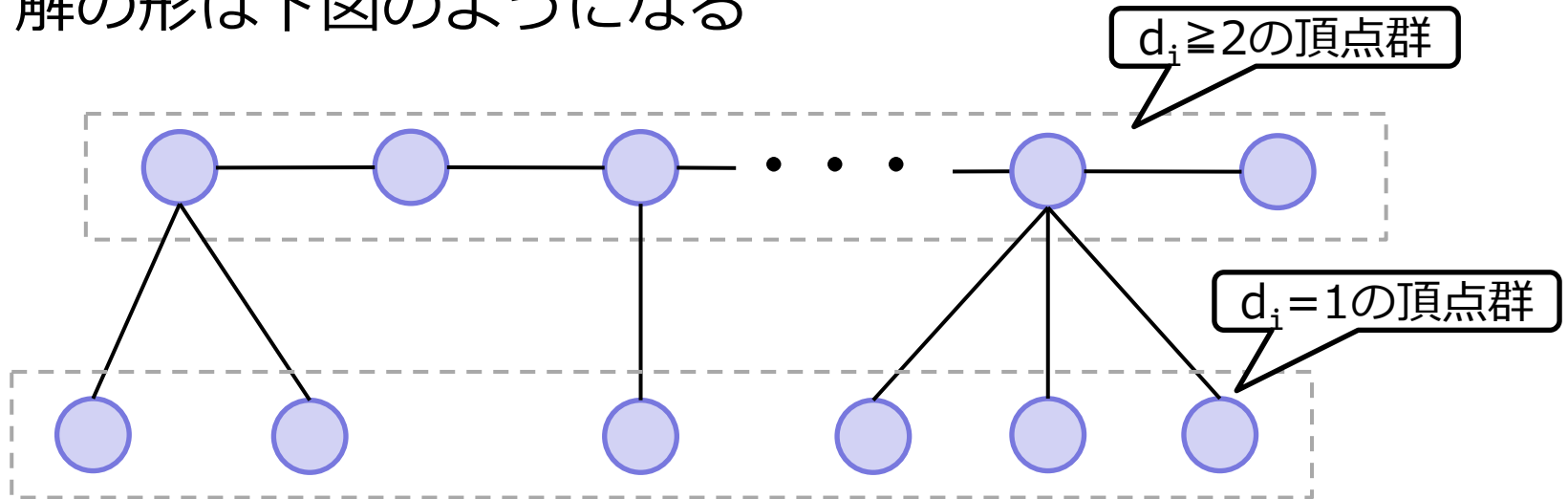
- それぞれ2個のパラメータ p_i と d_i をもつ n 個の頂点に対し以下の条件下で最小全域木を求める問題
 - 頂点 i と頂点 j をつなぐ辺のコストは $|p_i - p_j|$
 - 頂点 i に接続する辺の数は d_i 以下
 - $2 \leq n \leq 4,000$
 - $1 \leq p_i \leq 10^9$
 - $1 \leq d_i \leq n$





方針

- 基本的に $d_i = 1$ の頂点は $d_i \geq 2$ の頂点につなぐため解の形は下図のようになる



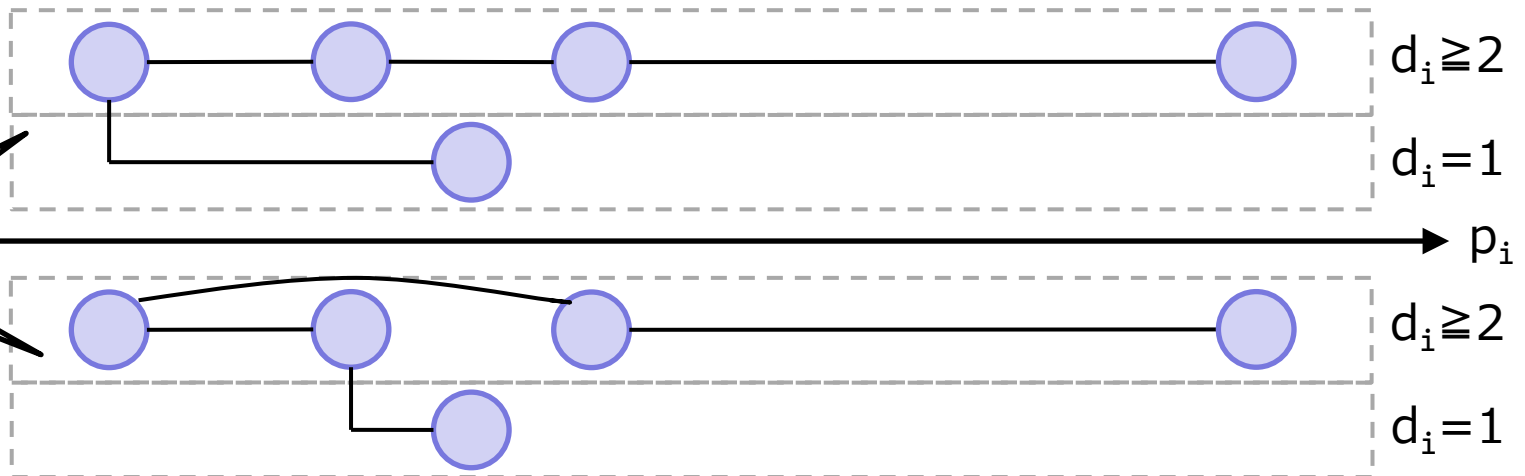
- この問題では以下の2点について考えれば良い
 - $d_i \geq 2$ の頂点をどのようにつなぐか
 - $d_i = 1$ の頂点をどの $d_i \geq 2$ の頂点につなぐか





$d_i \geq 2$ の頂点のつなぎ方

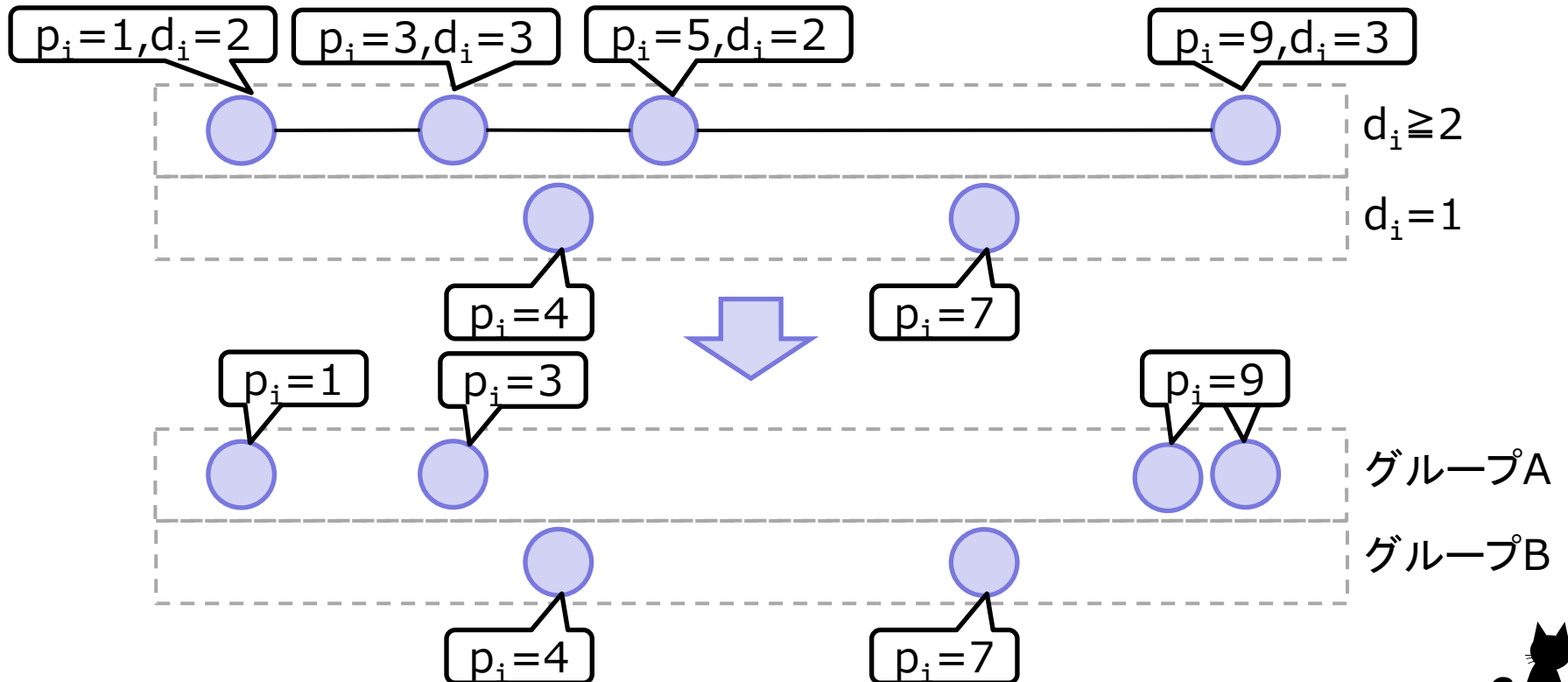
- p_i でソートした順につなげるのが最適
 - コストは合計で $\max(p) - \min(p)$
- $d_i = 1$ の頂点をつなげる時に問題にならない？
 - ソートせずにつなげたパターンはコストを増やさずにソートしてつなげたパターンに書き換えられるので大丈夫





$d_i = 1$ の頂点のつなげ方(1/3)

- $d_i \geq 2$ の頂点について、接続可能な $d_i = 1$ の頂点の数だけ同じ p の値を持つ頂点を複製すれば、2部グラフの最小費用最大マッチングの問題になる





$d_i = 1$ の頂点のつなげ方(2/3)

- グループAの頂点数 $<$ グループBの頂点数 なら-1
- 前ページのグループA, Bの頂点を p でソートしたとき, k 番目のindexをそれぞれ a_k, b_k とする.
- 頂点 a_i と b_j をつなげたとき, 頂点 b_{j+1} を頂点 $a_{i'} (i' < i)$ とつなげるのはムダ
- 以下の動的計画法で最小コストを求められる
 - $dp[i][j]$: $a_{i'} (i' \leq i)$ と b_j をつないだときの最小コスト
 - $dp[i][j] = \min(dp[i-1][j], dp[i-1][j-1] + |p_{a_i} - p_{b_j}|)$
- 普通にやると, グループAの頂点数が $O(n^2)$, グループBの頂点数が $O(n)$ なので, 全体で $O(n^3)$ かかる





$d_i = 1$ の頂点のつなげ方(3/3)

- グループBの頂点をグループAのどの頂点につなぐかはpの値が近いものから $\pm n$ 個だけ調べれば十分
 - グループBの頂点が最大n個しかないので、 $\pm n$ 個調べればどこかの頂点は絶対に空いている
- これで計算量を $O(n^2)$ に落とすことができる





コーナーケース

- $d_i \geq 2$ の頂点が1個だけ
 - この時は, $d=1$ の頂点を d_i 個つなげられる
 - p でソートした後, 両端の頂点は-1, 他の頂点は-2と処理するとひっかかる可能性あり
 - 辺の両端から-1ずつするような処理なら引っかからない
- $n=2$ かつ全頂点で $d_i=1$
 - このケースだけ $d_i=1$ の頂点どうしを結ぶ必要がある





ジャツジ解

- 須藤 : 76行(1883B), C++
- 藪 : 62行(1774B), C++
- 保坂 : 128行(3001B), C++
124行(3014B), Java





結果

- Submitチーム数 : 7
- Acceptチーム数 : 3
- 総Submit : 21

- First Accept : tmt514 (154:24)

