

JAG ICPC模擬国内予選2024

H: 物理実験

原案 : pachicobue

問題文 : climpet

データセット : pachicobue

解答 : tempura0224, pachicobue, potato167, hos

解説 : pachicobue

問題概要

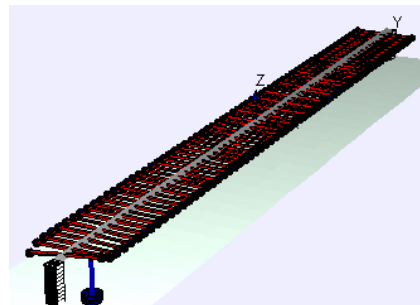
- 数直線上の線分 $[0, M]$ 上を等速往復運動をする点がある。
 - 時刻 0 に初期位置 X_0 から右向き速度 V でスタートしたとする (X_0, V は未知)。
- 時刻 $t = 1, 2, \dots, T$ での (座標, 向き) の多重集合 $\{(y_1, d_1), \dots, (y_T, d_T)\}$ が与えられる。
 - 集合なので順番の情報は失われている (y_i は時刻 i の情報とは限らない)。
- (X_0, V) を一つ復元してください。

制約

- $1 \leq M \leq 10^9$
- $2 \leq T \leq 10^5$

元の問題では以下の出力制約があったが本質的ではないので解説では無視する。

- 初期位置 X_0 は M ではない
- 右向きスタート

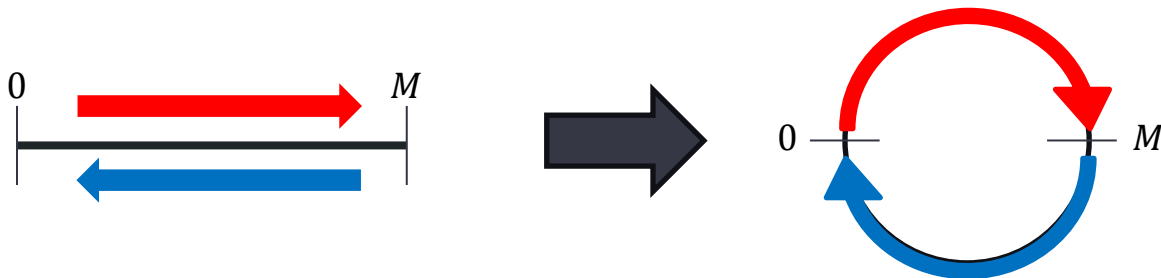


<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wavemachine.gif>

Lookang and Wolfgang Christian is the original author of the computer model using Easy Java Simulations (EJS) version 4.3 authoring and modeling tool created by Francisco Esquembre., CC BY-SA 3.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons

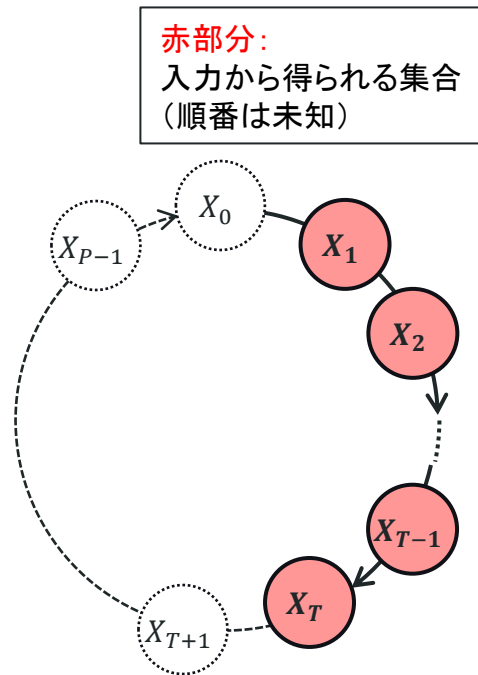
考察1

- 等速往復運動から、等速周回運動へ言い換える。
 - 右向きのルートと左向きのルートをくっつけると、円運動とみなせる。
 - 入力を次のように変換して、 $X_n = X_0 + Vn \pmod{2M}$ と考えていい。
 - $(y, \text{Right}) \mapsto y$
 - $(y, \text{Left}) \mapsto 2M - y$
 - 多重集合 $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ から (X_0, V) を復元する問題を解く。



考察2(周期を求める)

- $X_n = X_0 + Vn \pmod{2M}$ は周期的 (周期 $P = \frac{2M}{\gcd(V, 2M)}$)
 - 入力は重複のない集合とみなしてOK。
 - 登場回数Maxの元だけ考えればいい。
 - 以降 X_1, X_2, \dots, X_T が相異なるとして解説する。
- $g = \gcd(V, 2M)$ について以下が成立する(証明は次頁)
 - $\gcd(V, 2M) = \gcd\{(Y_2 - Y_1), \dots, (Y_T - Y_{T-1}), 2M\}$
 - $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\} := \{X_1, \dots, X_T\}$ の任意の並べ替え(つまり入力)
 - GCD g と周期 P が求められる。



考察2

- $\gcd(V, 2M) = \gcd\{(Y_2 - Y_1), \dots, (Y_T - Y_{T-1}), 2M\}$ の証明
 - 仮定より $\{1, 2, \dots, T\}$ の順列 p が存在し $Y_i = X_0 + p_i V \pmod{2M}$ となる。
 - 右辺は $\gcd(V \times \gcd\{(p_2 - p_1), (p_3 - p_2), \dots, (p_T - p_{T-1})\}, 2M)$ に等しい。
 - $2M$ とGCDを取っているので、 $\pmod{2M}$ は無視していい。
 - $\gcd\{(p_2 - p_1), (p_3 - p_2), \dots, (p_T - p_{T-1})\} = 1$ を示せばいい。
 - 左辺 = q とすると $1 = 2 = \dots = T \pmod{q}$ となり、 $q = 1$ が示される。

解法(コーナーケース)

(P, g) が分かったところで、先にいくつかコーナーケースをつぶしておく

1. $T = P$ の場合(ピッタリ n 周)

- $(X_0, V) = (Y_k, g)$ とすればOK。

2. $T = 1$ の場合(n 周+1)

- X_1 は分かっている。
- 元の制約的に最低1周はしていることに注意。
 - 周期に現れる値もすべて知っている。
- $\gcd(X_1 - X_0, 2M) = g$ となる X_0 を $O(T)$ の全探索で見つける。
 - $(X_0, X_1 - X_0)$ を出力すればOK。

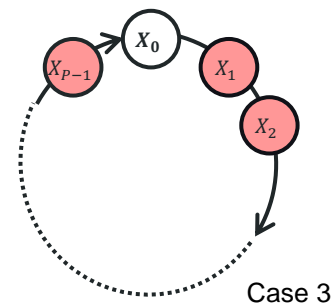
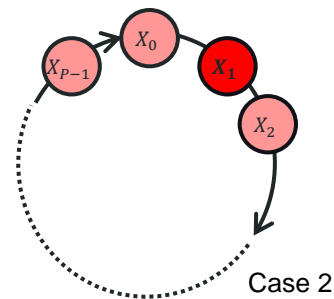
3. $T = P - 1$ の場合(n 周-1)

- 周期で現れる値全体の集合 $\{Y_1 + gn \mid n = 0, 1, \dots, P - 1\}$ は $O(T)$ 時間で列挙可能。
- そのうち入力で現れなかった値が X_0 である。
 - (X_0, g) を出力すればOK。

以降は $2 \leq T \leq P - 2$ と仮定する。

以下の出力制約を無視しているので要注意!

- 初期位置 X_0 は M ではない
- 右向きスタート



解法

T が周期 P に対して短いケースと長いケースで場合分けする。
長いケースは短いケースに帰着される。

1. $2T - 1 \leq P$ の場合 (T が相対的に短い)

- $O(T \log T)$ 時間で (X_0, V) を特定することが可能 (詳細は次頁以降)。

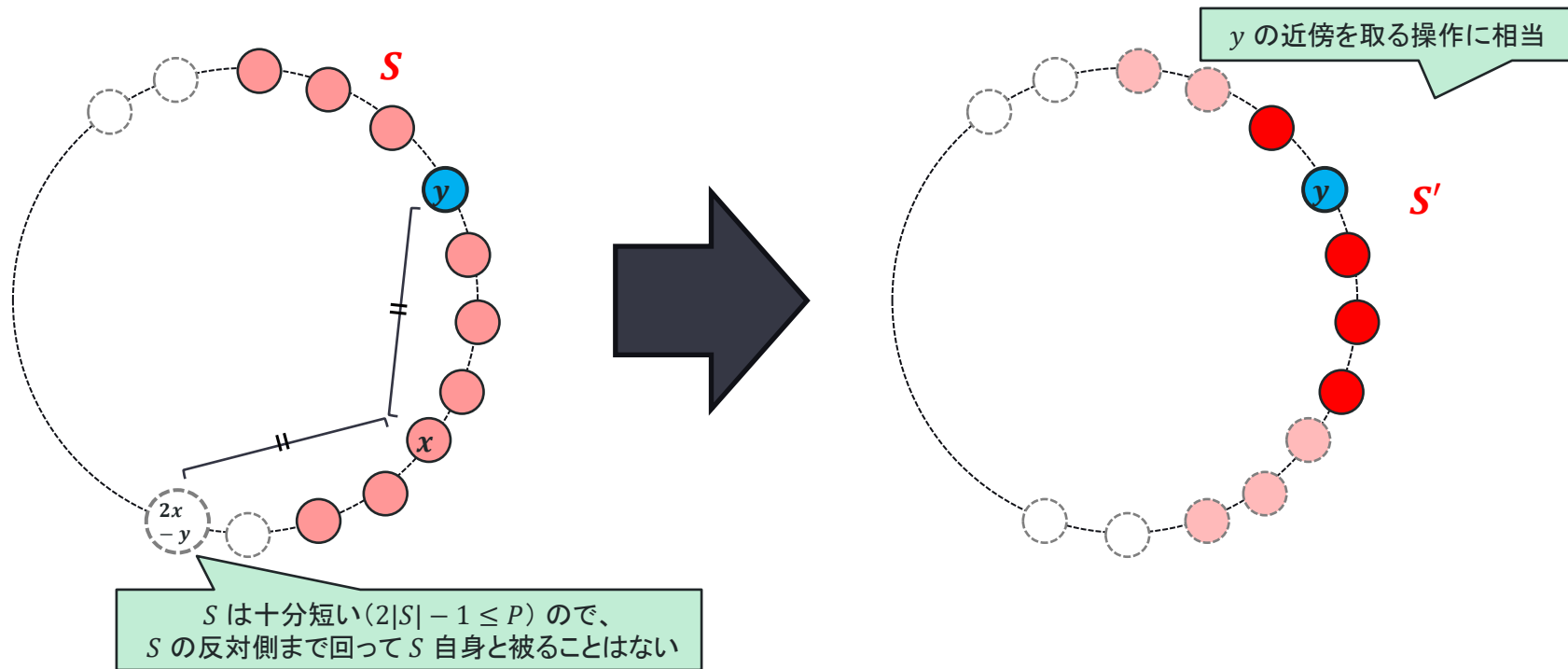
2. $2T - 1 > P$ の場合

- 周期で取りうる値全体の集合 $\{Y_1 + gn \mid n = 0, 1, \dots, P - 1\}$ は $O(T)$ で列挙可能。
- $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ の補集合を取ることで、 $\{X_{T+1}, X_{T+2}, \dots, X_P\}$ が求められる。
 - `std::map` 等を利用するとして $O(T \log T)$ 時間
- $\{X_{T+1}, X_{T+2}, \dots, X_P\}$ は Case 1 の解法が適用可能で、 (X_T, V) を求められる。
 - $2(P - T) - 1 \leq P$ が成立するため。

解法 ($2T - 1 \leq P$)

- $S = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ から始め、 $|S| = 2$ になるまで以下を再帰的に繰り返す。
 1. $y \in S$ を任意に取る。
 2. $S' := \{x \mid 2x - y \in S\}$ を新たに構築し、 $S \leftarrow S'$ と取り換える。
- 集合 S は以下を満たす。
 - ある $1 \leq t_l < t_r \leq T$ が存在して、 $S = \{X_{t_l}, X_{t_l+1}, \dots, X_{t_r}\}$ となる (不変条件)
 - ここに $2T - 1 \leq P$ が必要
 - $|S'| = \lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor$ or $\lceil \frac{|S|}{2} \rceil$
 - どちらになるかは $y \in S$ の選び方による

S のイメージ



解法 ($2T - 1 \leq P$)

- $S = \{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ から始め、 $|S| = 2$ になるまで以下を再帰的に繰り返す。
 1. $y \in S$ を任意に取る。
 2. $S' := \{x \mid 2x - y \in S\}$ を新たに構築し、 $S \leftarrow S'$ と取り換える。
- 集合 S は以下を満たす。
 - ある $1 \leq t_l < t_r \leq T$ が存在して、 $S = \{X_{t_l}, X_{t_l+1}, \dots, X_{t_r}\}$ となる (不変条件)
 - $|S'| = \lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor$ or $\lceil \frac{|S|}{2} \rceil$
 - どちらになるかは $y \in S$ の選び方による
- 不変条件より $|S| = 2$ なら $S = \{X_t, X_{t+1}\}$ と表せ、 V が特定できる。
 - V が決まれば Y_1 などから前に辿ることで X_0 が決まるため、 (X_0, V) が求められる。
- 計算量
 - 再帰の手順2は $O(|S| \log |S|)$ 時間
 - $|S|$ は約半分ずつに減っていくので、再帰全体では $O(T \log T)$ 時間となる。

別解1: 再帰の代わりに V を全探索

P.7: $2T - 1 \leq P$ の場合 (T が相対的に短い) 部分の別解

- V の候補として $\pm(Y_i - Y_1)$ を全通り試す
 - 各 V が題意を満たすかは Y_1 から前後に辿っていき、入力の Y を全て辿れるか判定する。
 - 入力の Y の外に出るまで前/後ろに辿って、「(辿った回数) == $T - 1$ 」を判定
- P.9 を見ると、 Y_i と Y_1 の距離が d の場合、前後に辿る回数は約 $\binom{T}{d}$ 回になる。
 - Y_i を全探索しても計算量は $\sum_{d=1}^T \binom{T}{d} \log T$ オーダーになり、 $O(T \log^2 T)$ 時間

別解2: ハッシュ利用(テスター解)

1. $2M \mid p - 1$ となる素数 p とその原始根 g を取る。
 - $b := g^{\frac{p-1}{2M}}$ とすると、 $X = Y \pmod{2M} \Leftrightarrow b^X = b^Y \pmod{p}$
 2. V の候補として $\pm(Y_i - Y_1)$ を全通り試す。
 - もし V が題意を満たすなら、 $\sum_i b^{Y_i} = b^{X_0} (\sum_{k=1}^T b^{kV}) \pmod{p}$ となるはず。
 - $\sum_{k=1}^T b^{kV} \pmod{p}$ は高速に計算可能
 - ここで $\sum_{k=1}^T b^{kV} \neq 0 \pmod{p}$ なら、 b^{X_0} が計算できる。
 - $b^{X_0} = b^{Y_i}$ となる Y_i が存在するなら $(X_0 = Y_i, V)$ をチェックする。
- 正当性は(少なくとも筆者は)示せていない
- ちょうど n 周のコーナーケースを除いて、 $\sum_i b^{Y_i} = 0$ を本質的に回避できないケースがあるとマズい
 - 素数 p と原始根 g に任意性があるので、そんなケースはなさそうな気がするが…
 - 「 $b^{X_0} = b^{Y_i}$ となる Y_i が存在するなら $(X_0 = Y_i, V)$ をチェックする」が大量の V でHitしないか？

ジャッジ解

- pachicobue (C++, 本解法) : 106行, 3495 bytes
- potato167 (C++, 本解法) : 118行, 3003 bytes
- pachicobue (C++, 別解1) : 98行, 3207 bytes
- tempura0224 (C++, 別解1) : 186行, 5412 bytes
- hos(C++, 別解2) : 323行, 10368 bytes

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 1 / 6
- First Acceptance
 - Screenwalkers (2:27:13)