

JAG ICPC模擬国内予選2025

H: 順列の積

原案:Dispersion

問題文:climpet

データセット:Dispersion

解答:climpet, Dispersion, hos, mtsd, pachicobue,

解説:Dispersion

問題概要

- 次の条件を満たす $R \times C$ 行列を構築せよ
 - 各行は $(0, 1, \dots, C-1)$ の順列である
 - 第 j 列に書かれた数の積 mod C を M_j とおくとき、 $M_j = j$ が成り立つ

制約

- $R, C \leq 100,000$
- $R \times C \leq 500,000$

解法 (1 / 5)

- 明らかに 0 は第 0 列にしか置けない
 - 第 j 列に置いたとすると $M_j = 0$ になるため



より一般化すると...

- C の約数 g について、 g は第 (g の倍数) 列にしか置けない
 - $(g \text{ の倍数}) \bmod C$ は必ず g の倍数であるため
- つまり $0 \leq x \leq C-1$ に対し、
 x が置かれる列番号は $\gcd(x, C)$ の倍数に限定される

- $0 \leq x \leq C-1$ に対し、
 x が置かれる列番号は $\gcd(x, C)$ の倍数に限定される

解法 (2 / 5)

積 $\text{mod } C$ の性質をもう少し観察する

- C の素因数の一つを p とする
 - 第 p 列に注目すると p の倍数ばかりが掛けられる
 - もし p^2 も C の約数であると仮定すると、 $M_j = p$ を満たす列 j が存在しないことになる
 - したがって、 C が平方数を約数に持つ \Rightarrow 常に No

解法 (3 / 5)

- $0 \leq x \leq C-1$ に対し、
 x が置かれる列番号は $\gcd(x, C)$ の倍数に限定される

積 $\text{mod } C$ の性質をもう少し観察する

- C が素数 P の場合を考える
 - $(1, 2, \dots, P-1)$ の積 $(\text{mod } P)$ は、威尔ソンの定理より $(P-1)! = -1 \pmod{P}$
 - 第 $1 \sim P-1$ 列に置かれる数全体の積 $(\text{mod } P)$ は $(-1)^R$ に等しいため、 R が偶数だと構築 **不可能**
 - ただし、 $-1 \equiv 1 \pmod{P}$ となる $P = 2$ は例外
- C が合成数の場合もほぼ同様
 - 1ページ前の考察より $C = pN$ ($p > 2$ は素数、 p と N は互いに素) と表せる
 - N の倍数 $N, 2N, \dots, (p-1)N$ に注目すると、積 $(\text{mod } p)$ は $(p-1)! \times N^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ になる
 - したがって、 R が偶数のときは構築不可能

解法 (4 / 5)

ここまでまとめ

- C が平方数を約数に持つ \Rightarrow No
- $C > 2$ かつ R が偶数 \Rightarrow No

これ以外は構築できます！！

- $C = 2$ のとき : $(0, 1)$ を R 回繰り返すだけ
- $C > 2$ かつ R が奇数のとき : ?

解法 (5 / 5)

$C > 2$ かつ R が奇数のとき

- $P[i] := i$, $Q[i] := \gcd(i, C) \times \text{inv}(i / \gcd(i, C), C / \gcd(i, C))$
により長さ C の配列 P, Q を定める
 - ただし、 $\text{inv}(k, m)$ は $kx = 1 \pmod{m}$ を満たす ×
- P と Q を交互に並べた $PQPQ...PQP$ の積は $(0, 1, \dots, C-1)$ の順列になる

(直感的な話)

- $\gcd(i, C)$ が同じならば、 $P[i] \times Q[i]$ の値も同じだと都合がいい
- $Q[i] = \gcd(i, C)^2 / i$ だと思うと $P[i] \times Q[i] = \gcd(i, C)^2$ になって嬉しい

ジャッジ解

- climpet (C++): 98 lines, 1.5 kB
- Dispersion (C++): 94 lines, 1.71 kB
- hos (C++): 165 lines, 5.49 kB
- mtsd (C++): 124 lines, 2.6 kB
- pachicobue (C++): 154 lines, 3.91 kB

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 16 / 42
- First Acceptance
 - THS (60 min)