Chairs 解説

Writer: Forested / Special Thanks: Cyanmond

2025/09/13

問題概要

$H \times W$ のグリッドがあり，選べるマスと選べないマスがある

上下左右に隣合うマスを同時に選べないという制約のもとで，なるべく多くのマスを選ぶ（最大独立集合）

各マスについて，最大独立集合に含まれうるかを判定する

制約：$H \leq 400, W \leq 400$

考察

有名事実：グリッドグラフは二部グラフ．証明：市松模様に塗ればよい．

結局次の問題が解ければよい．

> 二部グラフ $G = (L, R; E)$ が与えられる．各頂点について，最大独立集合に含まれ得るか判定せよ．

以下，$V = L \sqcup R$ とする．

考察

二部グラフにおける重要な有名事実：

最大マッチングの大きさを M，最大独立集合の大きさを I とすると，$M + I = |V|$.

略証：最大マッチング $=$ 最小頂点被覆を示せばよい．最小頂点被覆を自然に燃やす埋めるの形で書くと最大マッチングが求まるグラフになる．

考察

$v \in V$ について，以下の命題は全て同値

- v を含む最大独立集合が存在する
- v と $\delta(v)$ 内の頂点を G から消すと最大独立集合の大きさが 1 減る
- v と $\delta(v)$ 内の頂点を G から消すと最大マッチングの大きさが $|\delta(v)|$ 減る
- $\delta(v)$ 内の頂点を G から消すと最大マッチングの大きさが $|\delta(v)|$ 減る

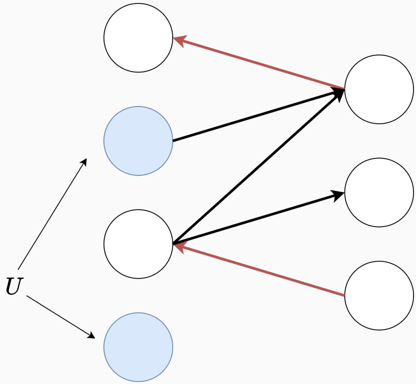
以下，一番下で考える

考察

G の最大マッチング M を適当に 1 つ求めておく．

左側の頂点で M に使われていない頂点の集合を $U \subseteq L$ とする．

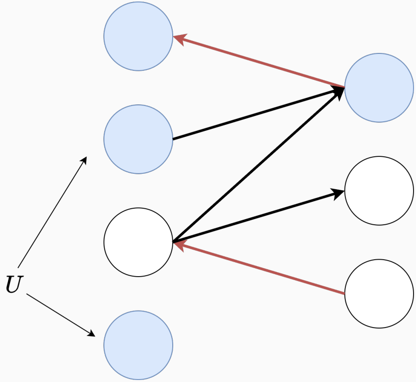
M 内の辺は右から左に，それ以外の辺は左から右に向きづけたグラフ（残余グラフ）G' を考える．



考察

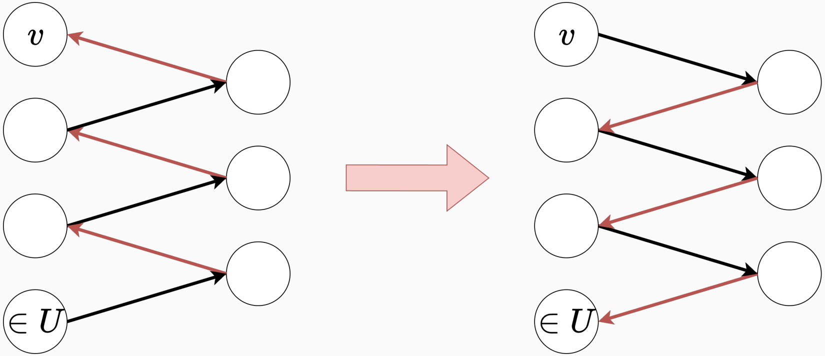
$v \in L$ について，次の条件が同値．

- v を消すと最大マッチングの大きさが 1 減る
- U 内の頂点からは G' 上で v に到達できない



証明

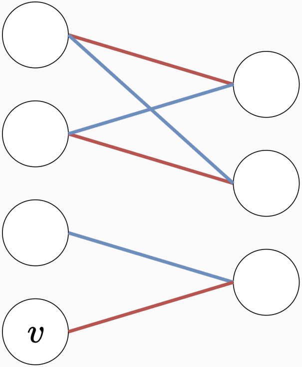
到達可能だとする．交互に辺を入れ替えて新たなマッチングを作ると，v は含まれない．よって v を削除しても最大マッチングの大きさは減らない．



証明

v を削除しても最大マッチングの大きさは減らないとする．$v \notin U$ の場合のみ示す．v を端点として含まないような新たなマッチング M' を取る．

M と M' の対称差を取る．（赤：M，青：M'）



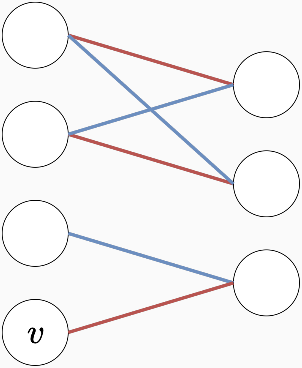
証明

各頂点の次数は 2 以下だから，単純パスとサイクルからなる．

M の最大性より，青で始まって青で終わる単純パスは存在しない．

$|M| = |M'|$ より，赤で始まって赤で終わる単純パスも存在しない．

$v \notin U$ と M' は v を端点として含まないことより，v には赤色の辺のみ接続する．

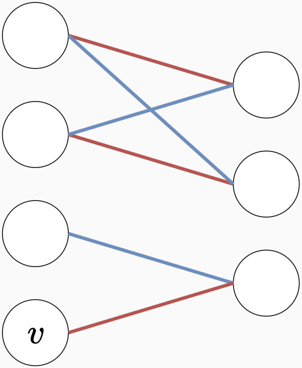


証明

以上より，青→赤→... →青→赤となる v 終点の単純パスが存在する．

始点は青のみ接続するので，U に含まれる頂点である．

よって，このパスは G' 上では U に含まれる頂点から v へのパスになっている．



考察

$v \in L$ を消すと最大マッチングの大きさが 1 減るとする．このとき G' から v を消したグラフは valid な残余グラフである．

v を消したとき，U に含まれる頂点から到達可能な頂点が増えることはない．

結論

$u \in R$ について，次の 2 つが同値

- u を含む最大独立集合が存在する
- $\delta(u)$ 内の頂点はいずれも U に含まれる頂点から到達不可能

結論

二部グラフの最大マッチングは $O(E\sqrt{V})$ で計算できる

BFS を 1 回すると右側の頂点全てについての答えがわかる，2 回するとすべてわかる

計算量：$O(HW\sqrt{HW})$

おまけ

残余グラフを SCC してできる頂点集合の分解を DM 分解と呼びます

- Dulmage-Mendelsohn decomposition

二部マッチングに関する色々な情報が得られて，これを使ってもよいです

統計情報

- AC: (0 + ?) teams
- FA: ???