

I-Inside Yamanote 解説

原案・解説 ynymxiaolongbao

問題概要1

- 円環状のグラフがあり、頂点 i と頂点 $i+1$ は重み $L[i]$ の辺で結ばれている。
- ここに任意の個数だけ、任意の二頂点を結ぶ、任意の非負の重みの辺を、追加する。
- 一つの頂点を選んで”首都”とし、その頂点からの各頂点 i までの距離を $d[i]$ とする。
- d に関するある関数の最適化問題を解く。

問題概要1

- 作れる d の必要十分条件 ...
 - 任意の i で $|d[i] - d[i + 1]| \leq L[i]$
 - ある i について $d[i] = 0$
- 必要性 ... 最短路の性質から明らか
- 十分性 ... $d[i] = 0$ にする i を首都として、そこから j に対して重み $d[j]$ の辺を張る

問題概要2

- 頂点 i の「 X として現れる回数 - Y として現れる回数」を $w[i]$ とすると、以下のような問題になる。
- 以下のような数列 p が作れる。
 - 任意の i で $|p[i] - p[i + 1]| \leq L[i]$
 - ある i について $p[i] = 0$
- 長さ N で総和が0の数列 w が与えられる。 $p[i] * w[i]$ を最大化せよ。

問題概要3

- 頂 w の総和が0なので、 p の全体加算に対してコストは不変。よって「ある i について $p[i]=0$ 」が不要。問題は以下のように言い換えられる。
- 以下のような数列 p が作れる。
 - 任意の i で $|p[i] - p[i + 1]| \leq L[i]$
- 長さ N で総和が0の数列 w が与えられる。 $p[i] * w[i]$ を最大化せよ。

問題概要4

- LP双対を取ると、以下のように言い換えられる。
- 長さNの整数列Bを作る。
- 長さNで総和が0の数列wが与えられる。 $B[i] - B[i - 1] \geq w[i]$ である必要がある。
- $L[i] * B[i]$ の和の最小化

問題概要5

- W の総和が0であるため、 B に関する制約の等号が成立する。 $B'[0] = 0$, $B'[i] = w[i] + B'[i - 1]$ ($i \geq 1$)とすると、以下のように言い換えられる。
- 長さ N の整数列 L , B' が与えられる。
- 実数 k を動かしたときの、 $L[i] * (B'[i] + k)$ の和の最小化

解法

- [問題]
- 長さ N の整数列 B' が与えられる。
- 実数 k を動かしたときの、 $L[i] * (B'[i] + k)$ の和の最小化
- k を、 $B'[i]$ の、 $L[i]$ で重み付けをしたときの中央値とすればよい
- $B'[i]$ で i をソートしたときの $L[i]$, $L[i] * B'[i]$ の区間和を求められればよい
- セグ木上の二分探索で準線形時間

統計情報

- AC / 0 teams (凍結前)
- FA / ???