

Billion Tree

原案：someone_

Special Thanks (強化・解法提供)：rian_tkb, tatyam

問題概要

以下の条件を満たす重み付き木 T を構築せよ

- 頂点数は 2 以上 65 以下
- 各辺の重みは 0 以上 10^9 以下
- 1 以上 10^9 以下のすべての整数は T の 5 つ以下のパス重みの和として表現可能

基本方針

$10^9 < 2^{30}$ なので、一旦 2^{30} 未満を表現することにする

5 個のパスを使えるので、 $2^{30} = (2^6)^5 = 64^5$ とみなして、

1 つのパスで $[1, 64)$ を作れる **小さめの木** を探す

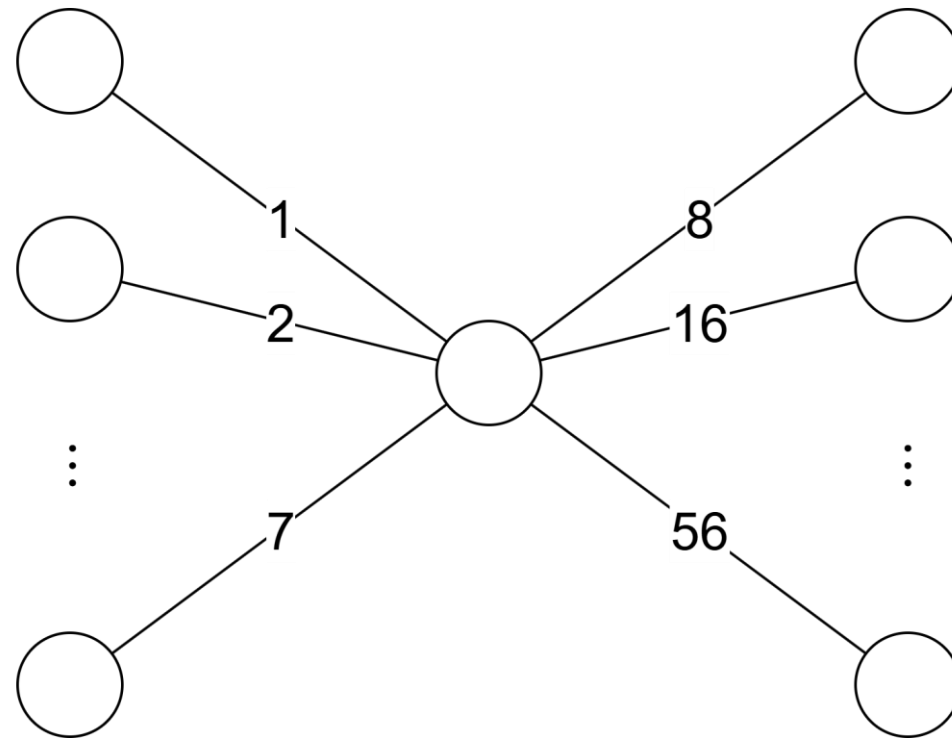
小さめの木 を 5 個用意し、 $64^0 \sim 64^4$ 倍してつなげる

小さめの木 は（パスやスターなど）木の形を限定した上で

枝狩り探索 or 手で頑張ってみつけることを想定

小さめの木

辺重みが $1, 2, \dots, 7, 8, 16, \dots, 56$ のスターグラフ (15 頂点 14 辺)



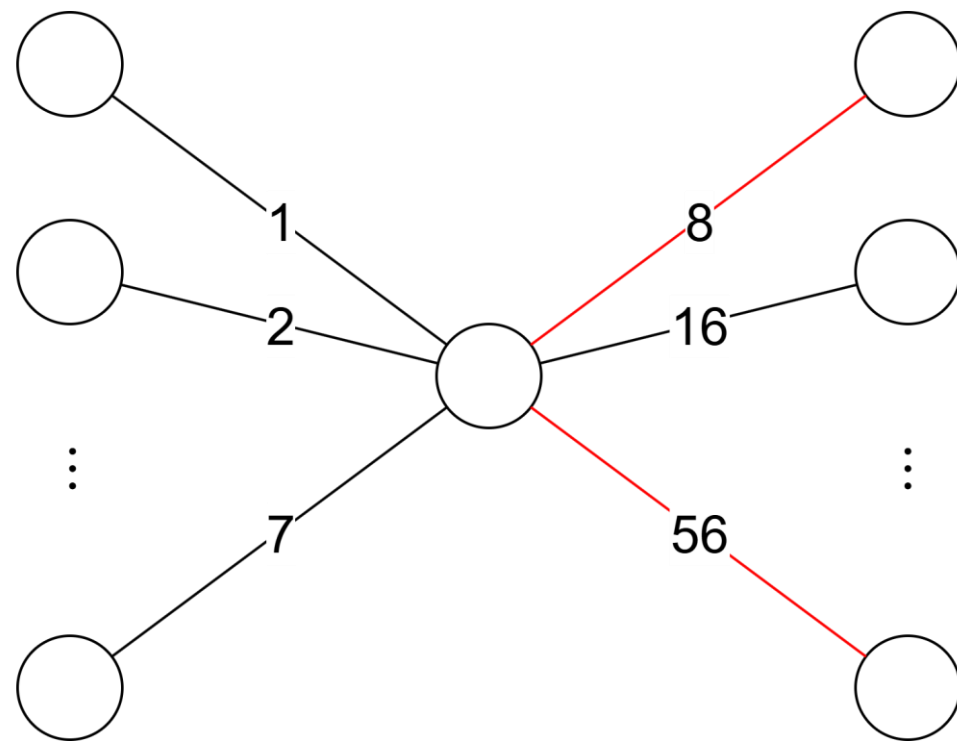
小さめの木

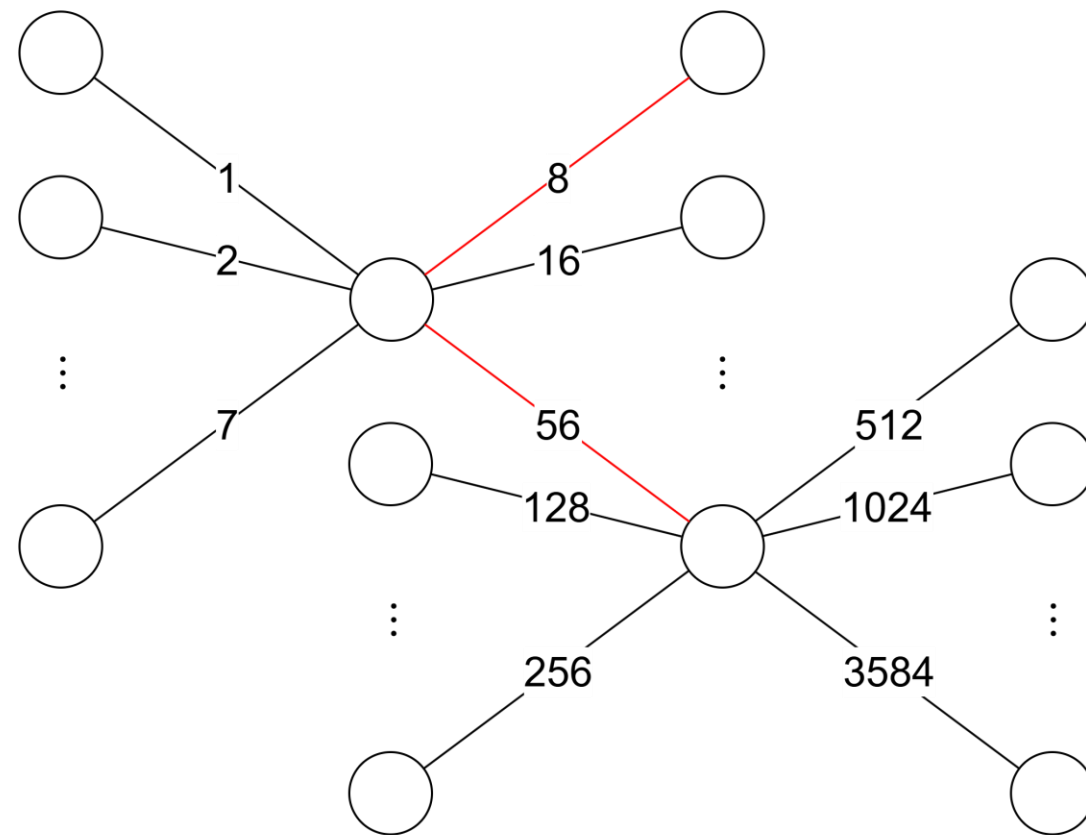
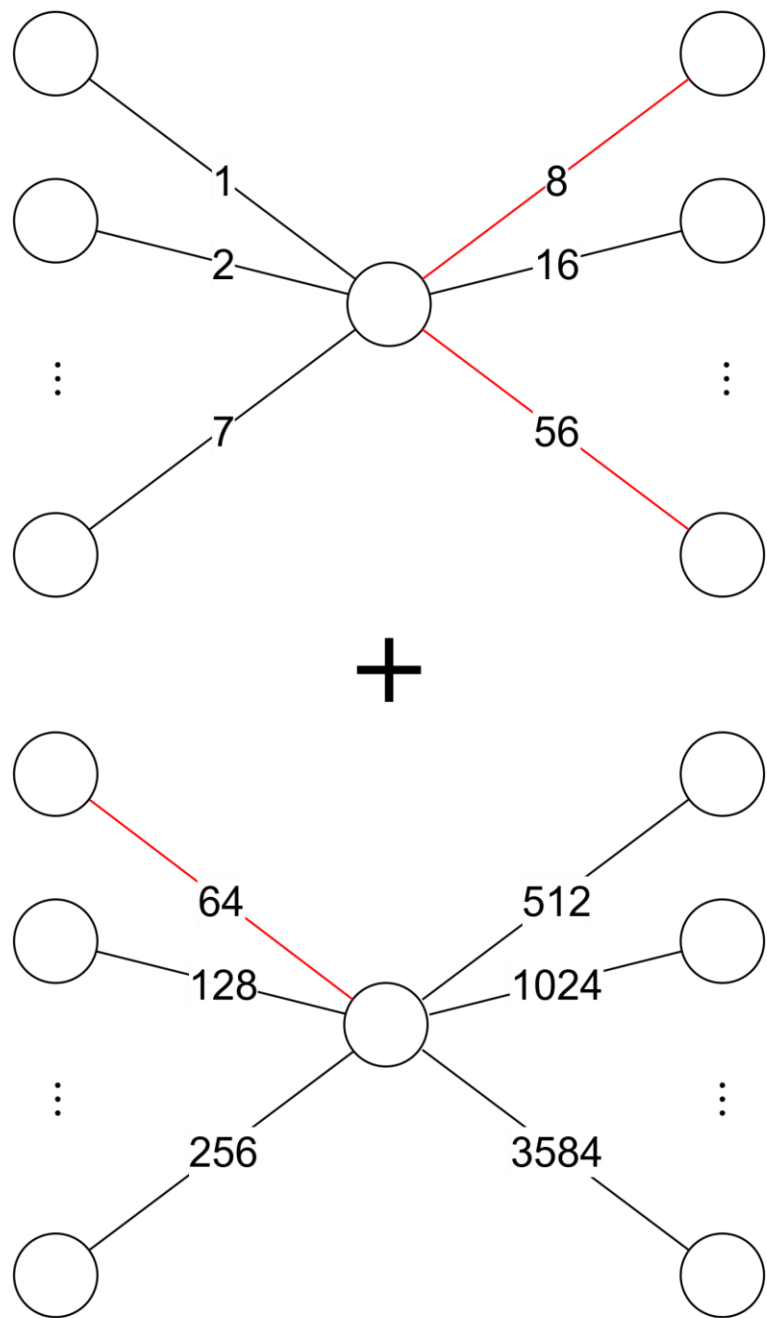
15 頂点なので，そのまま繋げると 75 頂点

頂点を 1 つ使い回す（スターグラフの中心を共有する等）と 71 頂点

頂点数の削減

観察：64 も作れる





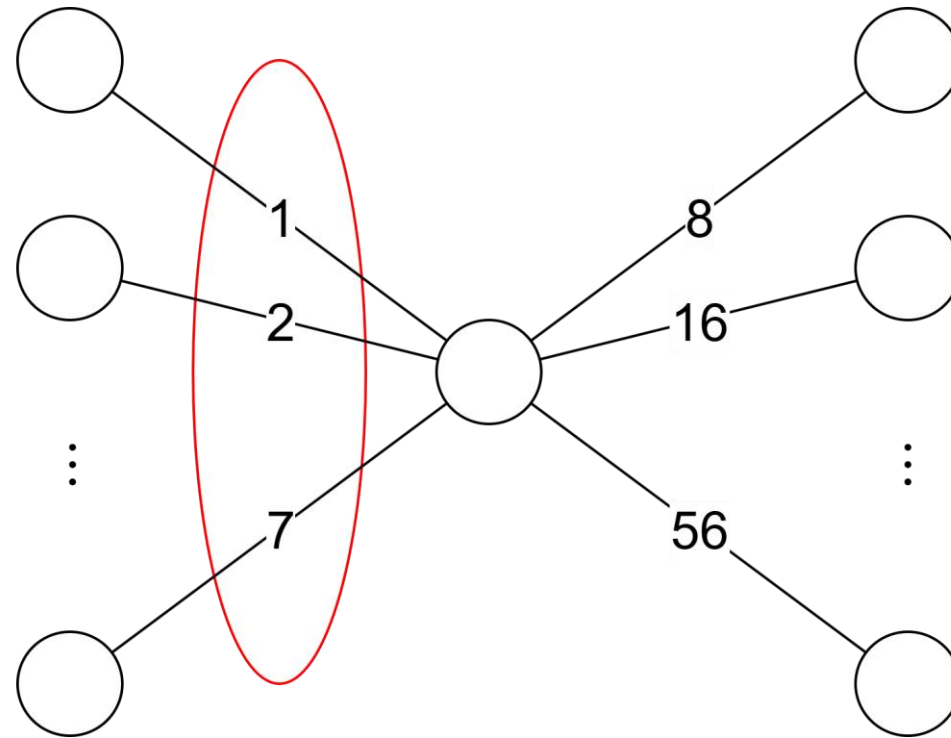
頂点数の削減

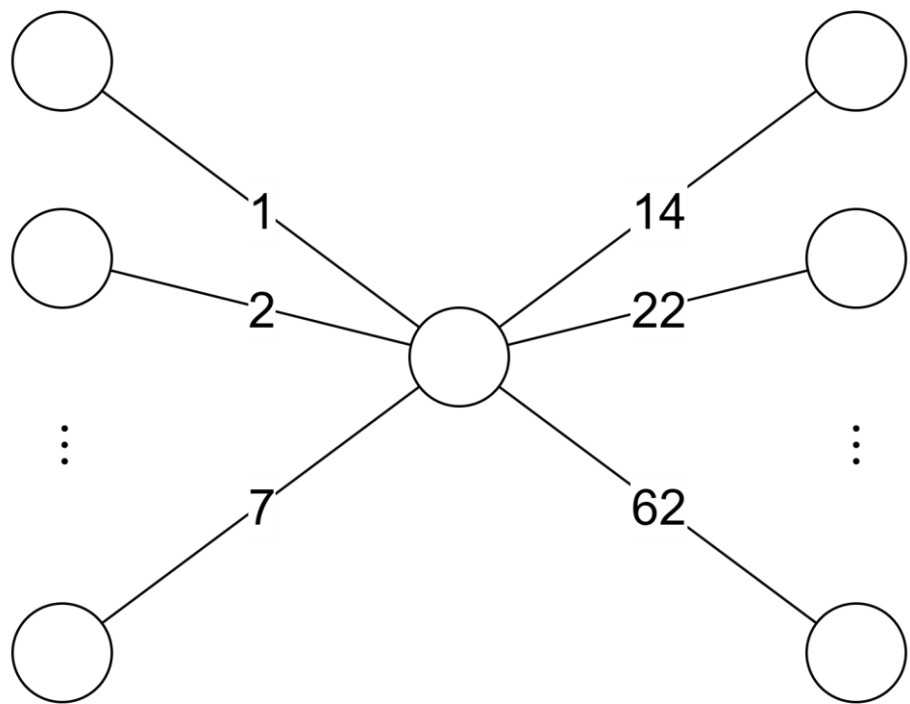
2 目以降の木は辺数が 1 つ削減されている

$14 + 13 \times 4 = 66$ 辺 (= 67 頂点) で達成できた

さらなる削減

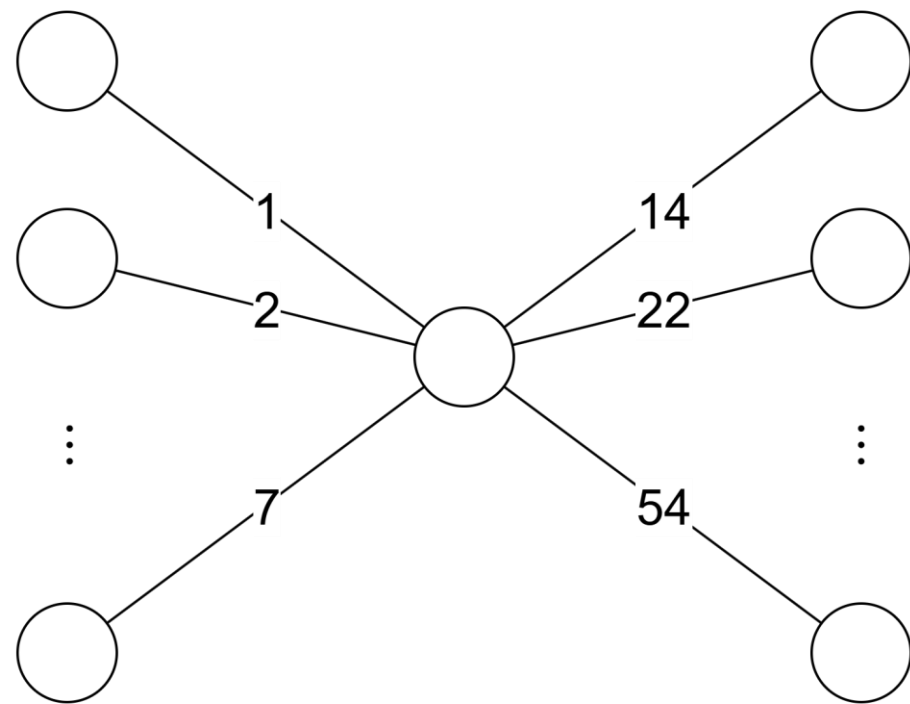
観察 2：左側だけで 1 から 13 まで作れる





木 A (14辺)

[1, 69] が作れる



木 B (13辺)

[1, 61] が作れる

A を 2 つ, B を 3 つ用いて以下のように組む

1. A : $[1, 69)$ ← 最大をあえて諦めて, 次の木に押し付ける
2. $A \times 69$: $\cup [69, 69^2)$
3. $B \times 69^2$: $\cup [69^2, 69^2 \times 61)$
4. $B \times 69^2 \times 61$: $\cup [69^2 \times 61, 69^2 \times 61^2)$
5. $B \times 69^2 \times 61^2$: $\cup [69^2 \times 61^2, 69^2 \times 61^3]$

$69^2 \times 61^3 = 1,080,656,541 (> 10^9)$ まで作れる !

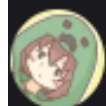
さらなる削減

$14 + 14 + 13 + 13 + 13 = 67$ 辺で作れた

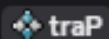
最大をあえて諦めたことで、 64^5 のときと同様の方法で、2 つ目以降の木の辺を 1 つずつ削減できる

→ $14 + 13 + 12 + 12 + 12 = 63$ 辺 (= 64 頂点) でできた！

? ? ?



tatyam



2025/08/16 3:07

N = 41

A = 1 1 2 4 7 12 20 34 56 94 156 258 428 709 1176 1949 3229 5351 8867 14693 24347 40343 66849 110768 183544
304132 503947 835040 1383662 2292729 3799052 6295029 10430863 17283941 28639490 47455635 78633988 130296518
215901331 357748505

N = 40

A = 1 1 2 4 7 13 22 36 61 103 173 290 485 813 1361 2279 3817 6391 10702 17919 30004 50239 84120 140851 235842
394893 661210 1107130 1853779 3103968 5197284 8702332 14571185 24397993 40851999 68402588 114533294 191774547
321107302



だれ

2025/08/16 11:07

!?

? ? ?

$1 < r$ を適当に選び, $\lfloor r^k \rfloor$ を辺重みに持つパスグラフを構築

$r = 1.6742$ とおくと, $0 \leq k < 39$ で 1006652149 まで作れる

- 40 頂点で作れる!
- ただし構築は難しい

$r = 1.36$ で $0 \leq k < 64$ とすると探索が高速にできて, 十分間に合う

まとめ

手でも解けるか？PC を使うと簡単になるか？

- 1 台の PC というリソースの使い方
- この問題の場合，探索方法もあまり自明でないと思います

この問題に張り付くあまり，他の可能な問題を逃していないか？

- 3 人の人間というリソースの使い方
- 順位表情報や体感難易度による問題の選び方
- かなりとっつきやすい見た目なので，誘惑に負けないよう注意

統計情報

- AC teams
 - 1 + ?
- First Acceptance
 - AMATSUKAZE (03:56)