C : Convenient Banknotes

原案 : Dispersion
解説 : Dispersion

問題概要

- 紙幣の額面 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ を自由に決められる。ただし、次の条件を満たす必要がある:
    - $1 = X_1 < X_2 < \ldots < X_k$
    - X_{i+1} は X_i の倍数
- (A, B, C 円を表すのに必要な紙幣の最小枚数の和) の最小値を求めよ。

- 制約
    - $A, B, C \leqq 10^8$

解法

- f(a, b, c) := (A = a, B = b, C = c のときの答え) とする。f(A, B, C) を求めたい
- 1 円札の次に小さい紙幣として d 円札を作ったとすると…
  - d 円札のブロックが a//d, b//d, c//d 個 ➜ f(a//d, b//d, c//d) のケースに帰着
  - a%d, b%d, c%d 円は余る
- つまり、f(a, b, c) = min_d { f(a//d, b//d, c//d) + a%d + b%d + c%d } で更新可能

- 引数に現れる組は (a, b, c) = (A//g, B//g, C//g) の形だけ
  - これは O(√max(A, B, C)) 個しかない
- また、同じ f(a//d, b//d, c//d) から遷移するなら d が最大のものだけ見ればよい
- 遷移を絞ったメモ化再帰により、f(A, B, C) を高速に求められる

計算量解析

- $g(x) = \min\{ g(x/2), g(x/3), \ldots, g(x/\sqrt{x}), g(\sqrt{x}), \ldots, g(2), g(1) \}$ という構造
- x 未満の g(･) が既知であれば、g(x) は $O(\sqrt{x})$ time で計算できる
- g(M) を求めるまでには
  - $O(\sqrt{M}) + O(\sqrt{M/2}) + \ldots + O(M^{1/4}) + O(M^{1/4}) + \ldots + O(\sqrt{2}) + O(\sqrt{1})$ time
  - これは $O(M^{3/4})$ time と表せる

- したがって、計算量は
  - $O(\max(A, B, C)^{3/4})$ time
  - $O(\max(A, B, C)^{1/2})$ memory

統計情報

- Acceptances
    - 1 + 2 teams
- First Acceptance
    - HHIJKT (232 min)