

### C - Two Greedy Customers 解説

原案：noya2      問題準備：Rice\_tawara459

## C：問題概要

- Alice が  $A$  円、Bob が  $B$  円持っている
- 商品  $i$  の価格は  $C_i$  円、購入したときの満足度は Alice が  $U_i$ 、Bob が  $V_i$
- 二人は商品を左から順に見て、**所持金が足りれば必ず購入する**
- 商品の並べ方を選び、二人の満足度の和を最大化する

### 制約

$$N \leq 200, \quad A, B \leq 120$$

## C：購入結果を固定したときの並べ方

各商品を「二人」「Alice のみ」「Bob のみ」「誰も買わない」に分ける

この順だけ考えればよい

- ① 二人とも買う商品
- ② 片方だけが買う商品を、価格の降順に並べたもの
- ③ 二人とも買わない商品

- 二人とも買う商品は先頭へ、誰も買わない商品は末尾へ移せる
- 片方だけが買う商品は、交換法により価格の降順にできる

したがって、各商品を誰が買うかを価格の降順に決めればよい

## C: 二人とも買う商品の合計価格を固定する

- 二人とも買う商品の合計価格を  $L$  とする
- それらを先頭に置いた後の所持金は  $A - L, B - L$

商品を価格の降順に見ながら、

$$\text{dp}[r][a][b] = \text{満足度の和の最大値}$$

を更新する

- $r$ : 今後「二人とも買う」にする商品の合計価格
- $a, b$ : 片方だけが買う商品に使える二人の残金

$L$  を一つ固定した計算量は  $O(NW^3)$ . すべての  $L$  を試すと

$$O(NW^4) \quad (W = \max(A, B))$$

となり、(おそらく) 間に合わない。

## C: すべての $L$ を一つの DP で試す

遷移は  $L$  を直接使わないので、すべての初期状態

$$\text{dp}[L][A - L][B - L] = 0 \quad (0 \leq L \leq \min(A, B))$$

を同じ DP に入れられる。

価格  $c$ 、満足度  $u, v$  の商品について、次を試す

| 扱い       | 条件             | 遷移先と加える満足度             |
|----------|----------------|------------------------|
| 無視       | 常に可能           | $(r, a, b), 0$         |
| 二人       | $r \geq c$     | $(r - c, a, b), u + v$ |
| Alice のみ | $a \geq c > b$ | $(r, a - c, b), u$     |
| Bob のみ   | $b \geq c > a$ | $(r, a, b - c), v$     |

最後に  $r = 0$  の状態だけを採用する

$$\text{答え} = \max_{0 \leq a \leq A, 0 \leq b \leq B} \text{dp}[0][a][b]$$

時間計算量  $O(NW^3)$       空間計算量  $O(W^3)$

- Python は少し厳しいかも…？ (Rice\_tawara の Python 解は 2sec くらい)
- 後ろから商品を返品していく形の DP でも  $O(NW^3)$  で解ける

- AC teams / Trying teams
  - $7 + ? / 3$
- First Acceptance
  - Rinshan Solution (83 min)