D : Do Make Segment Tree

原案:torisasami
解説:torisasami

問題概要

- 高さ N の完全二分木（頂点数 $2^N - 1$）の各頂点に整数が書かれている
- 「1 つの頂点の値を ± 1 する」を最短何回すれば segment tree（親の値 = 2 つの子の値の和）にできるか求める
- 頂点の値の更新クエリに Q 回対応する

制約: $N \leq 18,\ Q \leq 2 \times 10^5$

解法 (1/4)

例えば A_1, A_2, A_3 の値を確定して、これ以降操作しないものとすると、
頂点 2 以下の部分木での操作回数の最小化　と
頂点 3 以下の部分木での操作回数の最小化　は独立に考えてよい

➡ dp を考える

$dp[i][x] \coloneqq A_i$ を x にして確定するときの i 以下の部分木の操作回数の最小値

頂点 i が一番下の段のとき: $dp[i][x] = |A_i - x|$

遷移は以下のようになる

$$dp[i][x] = \min_{y}(dp[2i][y] + dp[2i+1][x-y]) + |A_i - x|$$

解法 (2/4)

頂点 i が一番下の段のとき: $dp[i][x] = |A_i - x|$

遷移は以下のようになる

$$dp[i][x] = \min_y(dp[2i][y] + dp[2i+1][x-y]) + |A_i - x|$$

よく観察すると以下のことが分かる

- すべての頂点 i について $dp[i]$ は下に凸な x の関数
- 頂点 i が下から k 段目のとき、$dp[i]$ の傾きは $-k$ から k であり、傾きが 2 増加する点が k 個ある

解法 (3/4)

よく観察すると以下のことが分かる

- すべての頂点 i について $dp[i]$ は下に凸な x の関数
- 頂点 i が下から k 段目のとき、$dp[i]$ の傾きは $-k$ から k であり、傾きが 2 増加する点が k 個ある

このことから $dp[i]$ の計算が $O(k)$ でできる

$$dp[i][x] = \underbrace{\min_y(dp[2i][y] + dp[2i+1][x-y])}_{} + \underbrace{|A_i - x|}_{}$$

$dp[i]$ の傾きの変化点の座標
= $dp[2i]$ と $dp[2i+1]$ の変化点座標の各点和

変化点に A_i を挿入

解法 (4/4)

下から k 段目の頂点 i について $dp[i]$ の計算が $O(k)$ でできる

前計算: $\sum_{k=1}^{N} k2^{N-k} = O(2^N)$

更新クエリ: $\sum_{k=1}^{N} k = O(N^2)$

全体の計算量は $O(2^N + QN^2)$

統計情報

- Acceptances
  - 0 teams
- First Acceptance
  - なし