

D - Robot Damage 解説

原案：Rice_tawara459

問題準備：Rice_tawara459

D：問題概要

- ロボットは原点から出発し、 $-W$ と W の壁の間を動く
- スイッチを押すたび、 $V_1, V_2, \dots, V_N$ の順に移動を試みる
- 壁が移動の途中にあれば、そこで停止してダメージを 1 受ける
- 壁にちょうど到着する場合と、壁に接したまま外向きに動く場合はダメージを受けない
- 各クエリ (W, T) について、スイッチを T 回押した後の総ダメージを求める

制約

$$\sum N, \sum Q \leq 4 \times 10^5, \quad W \leq 10^{16}, \quad T \leq 10^{12}$$

D: まず $Q = 1$ の場合

例として $W = 5$, $(V_1, V_2, V_3) = (-7, 6, 2)$ を考える。

周期	各フェーズ後の位置	起きること
1	$0 \xrightarrow{-7} -5 \xrightarrow{+6} 1 \xrightarrow{+2} 3$	左壁でダメージ
2	$3 \xrightarrow{-7} -4 \xrightarrow{+6} 2 \xrightarrow{+2} 4$	壁に触れない
3	$4 \xrightarrow{-7} -3 \xrightarrow{+6} 3 \xrightarrow{+2} 5$	壁にちょうど到着
4 以降	$5 \xrightarrow{-7} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+2} 5$	右壁でダメージ

赤字は衝突による停止、青字は速さ 0 での到着

周期の開始位置は $0, 3, 4, 5, 5, \dots$ と変化し、やがて同じ動きを繰り返す。

D : Q = 1 の周期構造

壁がないときの累積位置を

$$A_0 = 0, \quad A_i = \sum_{j=1}^i V_j, \quad D = \max_i A_i - \min_i A_i, \quad \Delta = A_N$$

- $D < 2W$ かつ $\Delta > 0$ なら、意味のある周期は次の 4 種類
 - ① 最初の周期
 - ② 壁に触れず、 Δ ずつ右へ進む周期
 - ③ 初めて右壁へ到達する周期
 - ④ 開始位置が変わらない定常状態
- $\Delta < 0$ は左右を反転すればよい
- $D \geq 2W$ なら、2 周期目から定常状態になる

D : $Q = 1$ なら解ける

- 1 周期を愚直にシミュレートする計算量は $O(N)$
- 最初の周期、壁へ到達する周期、定常状態だけシミュレートする
- 壁に触れない周期数は、 Δ と壁までの距離から割り算で求める
- 定常状態では、1 周期のダメージを残り周期数倍する

$Q = 1$ の解法

高々定数回のシミュレーションで $O(N)$

しかし、実際には $Q \leq 2 \times 10^5$. クエリごとに $O(N)$ はかけられない。

1 周期のシミュレーションを高速化したい

D: 衝突判定を「壁への接触」に言い換える

$V_i > 0$ の移動を考える。右の壁に衝突するかどうかは

$$[V_i - 1 \text{ 移動した後に右の壁に接している}] - [\text{移動前から右の壁に接している}]$$

で表せる。 $V_i < 0$ についても左の壁で同様。

移動列の変形

V_i を $(V_i - \text{sgn}(V_i), \text{sgn}(V_i))$ の 2 移動に分ける

- 変形後の長さ $2N$ の移動列を U とする
- 各時刻の壁への接触を数えれば、ダメージを計算できる
- ± 1 のずらしが「壁にちょうど到着」を正しく処理する

D : 1 周期の移動幅で場合分け

U の累積和を

$$S_0 = 0, \quad S_i = \sum_{j=1}^i U_j$$

とし、

$$D = \max_i S_i - \min_i S_i, \quad \Delta = S_{2N}$$

とおく。

二つのケース

- $D < 2W$: 壁の幅が十分に広いケース
- $D \geq 2W$: 壁の幅が十分に狭いケース

D : $D < 2W$ の場合 (広いケース)

1 周期の間に触れる壁は高々片側であることが示せる

よって、片側しか壁がないと思って、その場合を高速にシミュレートできればよい

- ロボットを原点に置き、右の壁だけを座標 P に置く
- このとき、各時刻 i について閾値 α_i が存在し、
「右の壁に接する」 $\iff P \leq \alpha_i$ となる。

$$\alpha_i = \begin{cases} S_i & (S_i \text{ が広義 prefix maximum}) \\ -\infty & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- 必要な α_i をソートすると、接触回数は二分探索で求まる
- 1 周期後の右壁までの距離は $p' = \max(P, \max_i S_i) - \Delta$
- 左の壁だけがある場合も、符号を反転すれば同じ

D : $D < 2W$ の場合 (広いケース)

- 右壁だけ、左壁だけの場合を前計算しておけば、1 周期を $O(\log N)$ でシミュレートできる
- $Q = 1$ で見た 4 種類の周期を同じように処理する
- 壁に触れない周期は割り算で飛ばし、定常状態のダメージは残り周期数倍する
- $\Delta = 0$ なら、ダメージが発生しうるのは最初の 1 周期だけ

クエリあたりの計算量

高々定数回の 1 周期シミュレーションで $O(\log N)$

D : $D \geq 2W$ の場合 (狭いケース)

この場合、2 周期目以降の開始位置は常に同じになる。

- S が最小値と最大値をとる時刻を見る
- その差が $2W$ 以上なので、1 周期目と 2 周期目の同じ時刻に同じ側の壁へ到達する
- したがって、1 周期目と 2 周期目の終了位置が一致する

1 周期目と 2 周期目のダメージをそれぞれ $d_1(W), d_2(W)$ とすると

クエリの答え

$$d_1(W) + (T - 1)d_2(W)$$

あとは $d_1(W), d_2(W)$ を高速に求めればよい。

D : $D \geq 2W$ の場合 (狭いケース)

狭い場合も、時刻 i に右の壁へ接する条件は $W \leq \alpha_i$ と書ける

$k = \max\{j < i \mid S_j > S_i\}$ とすると、右壁に対する閾値は

$$\alpha_i = \begin{cases} \max \left(S_i, \left\lfloor \frac{S_i - \min_{0 \leq j \leq i} S_j}{2} \right\rfloor \right) & (S_i \text{ が広義 prefix maximum}) \\ \left\lfloor \frac{S_i - \min_{k < j \leq i} S_j}{2} \right\rfloor & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

- k と区間最小値は、max/min セグ木の `min_left` などで求められる
- 左壁は符号を反転して同様に処理する
- U を 2 周期並べ、 d_1, d_2 用の閾値をそれぞれソートする

D: まとめ

- ① V_i を 2 移動に分け、ダメージを壁への接触回数に変換する
- ② 累積和の幅 D と壁間の距離 $2W$ を比較する
- ③ $D < 2W$ では、高々 4 種類の周期だけ进行处理する
- ④ $D \geq 2W$ では、1 周期目と定常状態のダメージを数える

計算量

前計算 $O(N \log N)$ 、クエリあたり $O(\log N)$

全体で $O((N + Q) \log N)$ time、 $O(N)$ space

- 不等号や境界・添え字の ± 1 のずれに注意

- AC teams / Trying teams
 - $0 + ? / 1$
- First Acceptance
 - ??? (??? min)