

F - Tree + 1 解説

原案：shobonvip,noya2 問題準備：noya2

F：問題概要

- N 頂点の無向木が与えられる
- 無向辺を好きな位置に 1 本追加し，
- 好きな頂点から始めて，すべての頂点を 1 回以上訪れるために必要な辺を辿る回数
- の最小値を求めよ
- $N \leq 5 \times 10^5$

F：なもりの前に木の場合を考える

- N 頂点の木が与えられる
- 好きな頂点から始めて、すべての頂点を 1 回以上訪れるために必要な辺を辿る回数
- を求めよ

この問題の答えは...？

$$2(N - 1) - (\text{木の直径})$$

F：なもりの前に木の場合を考える

- これ自体の出題例は山ほどある
- 証明を知っていますか？ **辺の寄与**を考えるのでした
- 始点と終点を固定してみる
- 辺を切ると 2 つの連結成分に分かれるが
 - 始点と終点が分かれるとき：奇数回、特に 1 回以上その辺を通る
 - 始点と終点が分かれないうき：偶数回、特に 2 回以上その辺を通る（0 回はある得ない）
- **これらの下界をすべて同時に達成可能！**
（各辺を倍化してオイラー閉路を取り，終点から始点に向かう最短パスの部分进行削る）
- 始点と終点の距離の最大化を解けばよい $\rightsquigarrow$ 直径

F: 解法

- なもりの場合でも，辺の寄与を考えてみよう
- 木の場合と違うのは，サイクルの部分. ここに注目
- そもそもサイクルの辺を 1 つ切っても連結成分は増えない
- そこで，サイクルの辺をすべて切ったときの連結成分を考える

F: 始点と終点に分かれるとき

- サイクル上の辺をすべて使うのは無駄
- $\rightsquigarrow$ ちょうど 1 辺だけ、使わない辺がある
- 結局、木に辺を追加したあと辺を削除して木の問題になっているはず
- ということは、直径の最大化ではある
- 辺を追加して直径を偽装できる
- 結局、点素なパスを 2 本取って合計長を最大化しようということになる

上界 1

2 つの点素な非空パスの頂点数の和の最大値を V とするとき、 $2N - V - 1$ を達成可能

F: 始点と終点に分かれないとき

- サイクルの辺をすべて使うと得するケースがある
- サイクルの辺と始点から終点に向かうパス上の辺は、1 回だけ通る（それ以外は 2 回）

上界 2

2 つの**辺素**な非空パスの**長さ**の和の最大値を E とするとき、 $2N - E - 1$ を達成可能

結局木にする場合に勝てるのは、2 つの辺素パスがサイクル上の点を共有する場合

⇨ 次数 4 以上の頂点から伸びるパスの長さ top 4 の合計ぶん得できるかも

F: 結論

得られた 2 つの上界の小さい方を達成可能

議論はすべての場合を尽くしているから, 必要性も言える

点素な 2 本のパスを取る部分は木 DP をする. 計算量は $O(N)$ time

- AC teams / Trying teams
 - $7 + ? / 20$
- First Acceptance
 - Rinshan Solution (74 min)