

G - Longest Path on DAG 解説

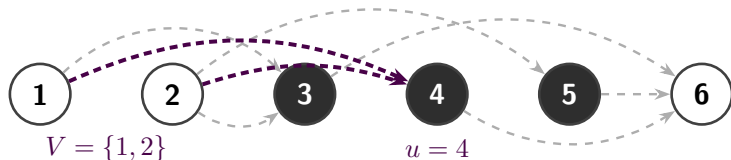
原案：noya2 問題準備：noya2

G：問題概要

- 有向二部グラフ $G = (B \sqcup W, E)$ があり，ジャッジが E を隠し持っている
- 与えられるのは頂点数 N と頂点集合の分割 $B \sqcup W$ だけ
- G は DAG であることが分かっていて， $(1, 2, \dots, N)$ はトポロジカル順
- ジャッジに次の 2 種類の質問をあわせて 15000 回まですることができる
 - $u \in B, V \subseteq W$ を指定する． $\exists v \in V, (u, v) \in E$ の真偽を聞く
 - $u \in B, V \subseteq W$ を指定する． $\exists v \in V, (v, u) \in E$ の真偽を聞く
- G の最長パスをひとつ出力せよ
- $N \leq 500$

G：ジャッジへの質問のイメージ

- 頂点には黒か白の色がついている
- 黒の頂点 1 つと白の頂点いくつかを指定して、特定の向きの辺が間にあるかを聞ける
- 下図は黒の頂点に向かう向きの質問の例



ジャッジへの質問： $\exists v \in \{1, 2\}, (v, 4) \in E$? 返答：Yes / No

G：戦略

Q. 辺の有無が全部分かっていたら何をするか？ A. DP

$dp(v) := v$ で終わる最長パスの長さ

を v の昇順に計算する. 主な方針 2 選：

- 貰う DP： $dp(v)$ を確定させるために，すでに確定した頂点から貰う
 - for each u ($u < v, (u, v) \in E$) , $dp(v) \xleftarrow{\text{chmax}} dp(u) + 1$
- 配る DP： 確定した $dp(v)$ から遷移するために，まだ確定していない頂点に配る
 - for each u ($u > v, (v, u) \in E$) , $dp(u) \xleftarrow{\text{chmax}} dp(v) + 1$

G: ジャッジから Yes が返ってきたとき, 辺を 1 本確定させられる

部分問題

集合 A の中に 1 つ以上の当たりの要素がある

1 回の質問では, $B \subseteq A$ を選んで, B の中に当たりがあるかどうかを聞くことができる

$\lceil \log_2 |A| \rceil$ 回の質問で, 当たりの要素を 1 つ特定してね

インタラクティブ典型: **二分探索** で解くことができる

◁ 覚えておきましょう

当たり候補の集合を半分に分割して, 当たりがある方 (当たりがない方) に置き換えることを繰り返せばよい.

G：重要な応用 2 選

応用 1：rank つき

問題：各要素には（既知の）価値がある．**価値の最も高い当たり要素**を同じ回数で特定してね

解法：価値の昇順に並べて同じように二分探索すればよい

応用 2：列挙（当たりが存在しない場合も含む）

問題： $1 + (\text{当たりの個数}) \cdot (1 + \lceil \log_2 |A| \rceil)$ 回の質問で**すべての当たり要素**を特定してね

解法：1 つずつ特定しては候補の集合から取り除けばよい

注意：当たりの個数 (≥ 0) を知らなくてもこの回数で抑えられる

注意：質問回数の割り当て先をちゃんと考えないといけない (charging argument)

G: 黒の頂点は DP を貰うことができる

- 黒の頂点 v について $dp(v)$ を確定させたい
- $u < v$ から遷移を貰いたい
- 白の頂点 u ($< v$) の中から $(u, v) \in E$ であって $dp(u)$ が最大の要素を見つけないといけない
- 応用 1: rank 付き をそのまま使える
- $k := (u < v \text{ なる白頂点の個数})$ として, 質問回数は $\lceil \log_2(1 + k) \rceil$
- 当たらない場合も含めた $1 + k$ 通りの状態を識別するので

G：黒の頂点は DP を配ることができる

- 黒の頂点 v について，確定した $dp(v)$ を白の頂点 u ($> v$) に配りたい
- 各白頂点に個別に配っていくと，結局すべての辺の有無を確定させる必要がある
- そういうときは，**まとめて配る**ことを考えよう！
- dp が確定した黒頂点の集合 V から，未確定の白頂点の集合 U にまとめて遷移する
- 応用 2：列挙 は候補集合から当たりを「絞り取っていく」のだった
- $dp(v)$ の降順に $v \in V$ から U の頂点を絞り取っていけばよい！
- 質問回数は $|V| + |U| \cdot (1 + \lceil \log_2 |U| \rceil)$ 以下

G : Q. なぜまとめて遷移できると嬉しいのか？ A. 分割統治できるから

分割統治 DP で $[L, R)$ を確定させたい

- 事前条件 : $[1, L)$ の頂点は確定済み
- 事前条件 : $[1, L)$ の黒頂点から $[L, R)$ の白頂点へは遷移済み
- $R - L = 1$ の場合, 頂点 L が黒なら DP を貰う
- そうでない場合, $M \in (L, R)$ を取る
- $[L, M)$ に再帰する
- $[L, M)$ の黒頂点から $[M, R)$ の白頂点にまとめて遷移する
- $[M, R)$ に再帰する
- 事後条件 : $[L, R)$ が確定済み

G：質問回数の評価

遷移にかかる質問回数を割り当てる (charging argument)

- 黒頂点 v が白頂点の集合 U へ配るときを考える
- 毎回まず候補全体を質問して、当たりが 1 つ以上あるかどうかを確認する
- 無かったとき：黒頂点が 1 回支払う
- あったとき：遷移先の白頂点が $1 + \log_2 |U|$ 回支払う

G：質問回数の評価

黒頂点が支払うぶん

- 黒頂点が貰うとき
 - 各黒頂点の前に N 個未満の白頂点がある $\rightsquigarrow$ 1 個当たり 9 回
- 黒頂点から配るとき
 - 各黒頂点は、再帰の各深さで高々 1 回支払う $\rightsquigarrow$ 1 個当たり 9 回
- 黒頂点 1 個当たり 18 回以下 という評価を得る

白頂点が支払うぶん

- $N = 512, M = (L + R)/2$ とし、右側は全部白という状況を考える
- 右にある白は、深さ $d \in [0, 9)$ で高々 $9 - d$ 回支払う
- 各深さの合計は白頂点 1 個当たり最大で 45 回だが、頂点番号によってはもっと小さい

白頂点が 18 回より少なく支払っているものは 18 回で勘定すると、合計 12132 回以下になる。

G：余談

実はこの評価は緩すぎる：黒と白の配置をほとんど気にしていない

実は M を区間の中央に取るよりも良い方法がある

方法 1：区間内の白頂点の個数で分割

$[L, R)$ 内の白頂点の個数を w として、 $M := L + w$ と定める

- こうすると、左側の黒頂点の個数と右側の白頂点の個数が等しくなる
- $\rightsquigarrow |V| + |U| \cdot (1 + \lceil \log_2 |U| \rceil)$ がバランスされる $\rightsquigarrow$ 8000 回以下と評価できる

方法 2：区間 DP をする

そもそも、二分探索の戦略を固定すれば、最適な分割位置 M は区間 DP で計算できる

- すべてのテストケースに通用する評価を得るのは難しい

- AC teams / Trying teams
 - $0 + ? / 3$
- First Acceptance
 - ??? (??? min)