

I: I love Square Number

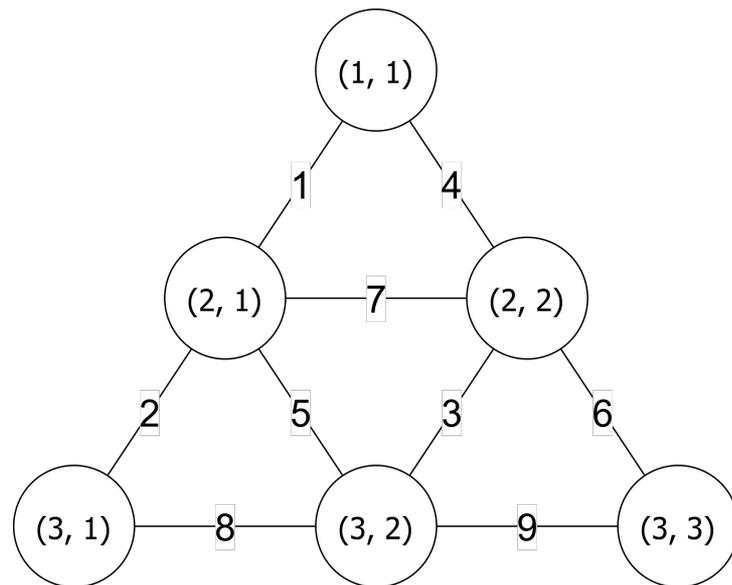
原案: someone_

解説: someone_

問題概要

右図のようなグラフが与えられる
相異なる頂点の対 (s, t) であって
任意の $s-t$ パスの重みが平方数で
あるものの個数は？

(パスの重みは辺重みの積)



記号/用語

任意の $s-t$ パスの重みが平方数であるとき、 (s, t) は**よいペア**

問題の言い換え：よいペアの個数を求める

$w(P) :=$ パス P の重み (=含まれる辺の重みの総積)

$f(x) := x$ を平方数で割れるだけ割った数

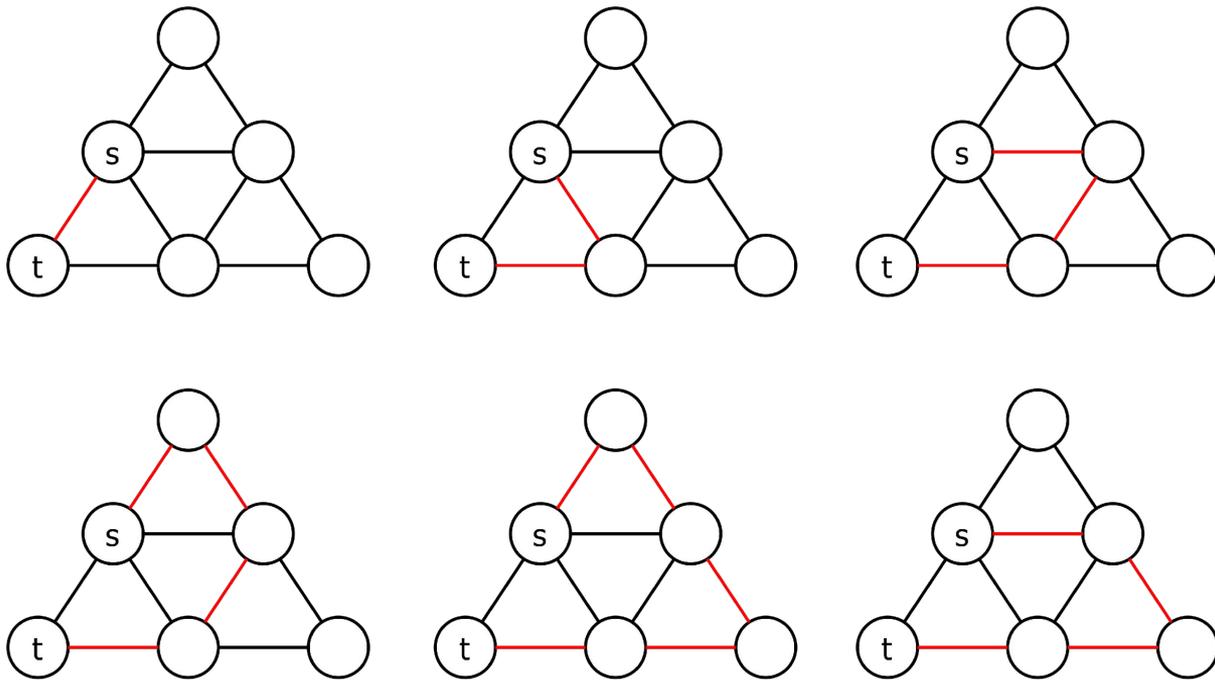
$$f(48) = 3, f(120) = 30, f(4) = 1$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ は平方数}$$

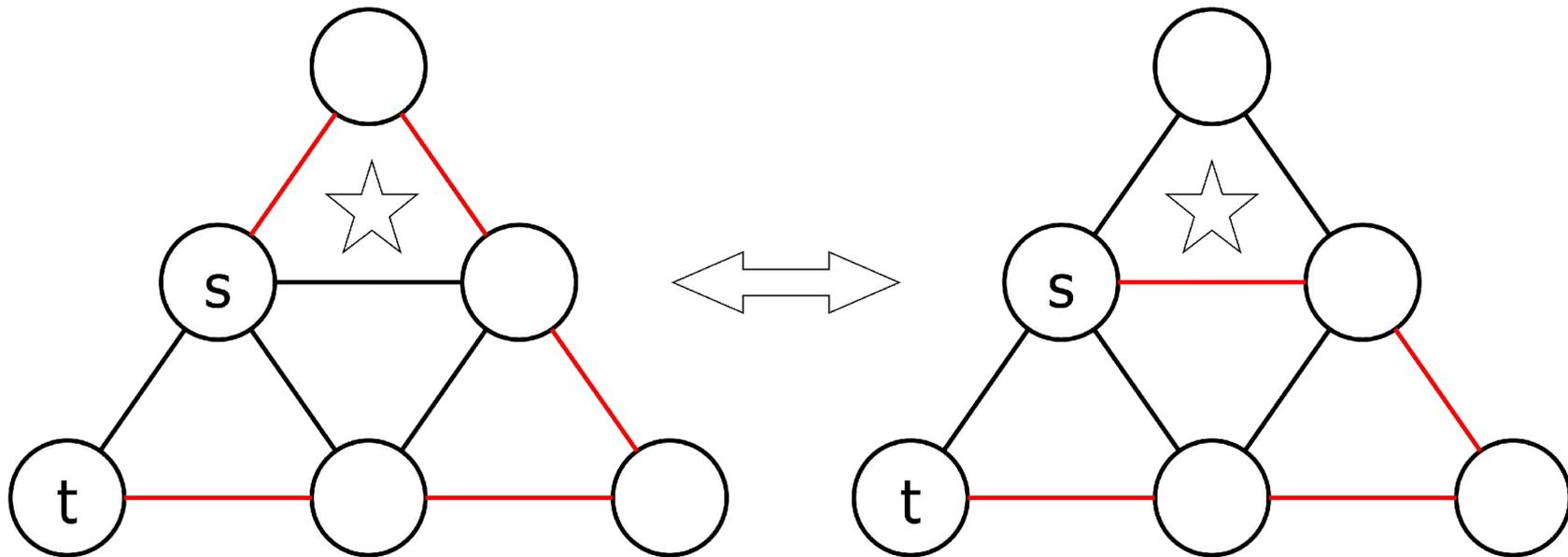
考察

(s, t) はよいペアか？ という判定問題を解く

すべての $s-t$ パスは「ある三角形の辺の有無を反転させる」という操作を繰り返して互いに移り合える



☆の三角形の 3 辺の重みの積が平方数であるとき、
左のパスの重みが平方数 \Leftrightarrow 右のパスの重みが平方数



考察

1. ある $s-t$ パス P について、 $f(w(P)) = 1$ である
2. すべての三角形の辺重みの積が平方数である

の 2 条件が成り立てば、 $s-t$ はよいペアである (十分条件)

そしてこれは必要条件でもある (証明略)

これでよいペアの必要十分条件が得られた

考察

2. すべての三角形の辺重みの積が平方数である

→各辺の重みを素因数分解しておけば判定できる

これが成り立たない場合：答えは 0

成り立っている場合：各 (s, t) について任意にパスを 1 つとり、

その重みが平方数か確認する

考察

頂点 $(1, 1)$ を根とする全域木をとる

$w(v) := (1, 1)$ から v への全域木上のパスの重み

$f(w(s)) = f(w(t)) \Leftrightarrow (s, t)$ はよいペア が成り立つ

$w(v)$ や $f(w(v))$ の値は非常に大きくなりうる

登場する素数に hash 値を割り当てて、Zobrist Hash の要領で
パス重みを管理する

計算量 $O(\max(A) + N^2 \log(N))$ など で解けた

統計情報

- Acceptances
 - 7 + 1 teams
- First Acceptance
 - Screenwalkers (76 min)