

I - Buttons 解説

原案：shobonvip 問題準備：shobonvip

I：問題概要

- 数列 $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ があり、最初は全部 0
- M 個のボタンがあり、それぞれのボタンは $X_L, X_{L+1}, \dots, X_R$ の X_i をそれぞれ 1 上げる
- ボタンは何回でも押せる
- ただし、最後はすべての i に対して $X_i \leq K$ にならないといけない
- $\sum_i X_i P_i$ (P_i は重み) を最大化

制約

$$N, M, K \leq 2 \times 10^5, \quad 1 \leq P_i \leq 10^7$$

マルチテストケース（各変数の和が抑えられてる）

I: 例

- $N = 4, M = 3, K = 2, P = (3, 1, 4, 2)$
- $(L, R) = (1, 2), (2, 3), (4, 4)$

P_i	3	1	4	2
	$X_1 = 0$	$X_2 = 2$	$X_3 = 2$	$X_4 = 2$

(2, 3) を 2 回

(4, 4) を 2 回

$$3 \times 0 + 1 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 14$$

となり、これが最大

I
いろいろ試行錯誤して…… 次が浮かぶかもしれない

区間が交わらないボタンの集合を選んで、
K 回連打するのが最適？ 🤔

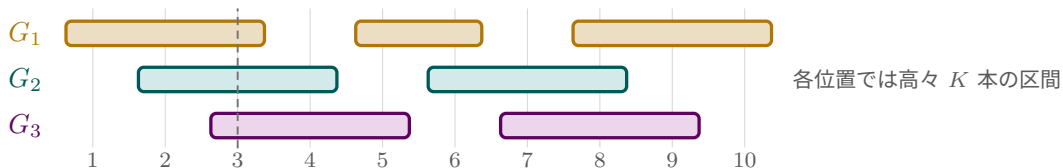
(K がなぜか制約で抑えられてるけど……)

正解！ だけど証明は？

Twemoji (CC BY 4.0)

I: 証明

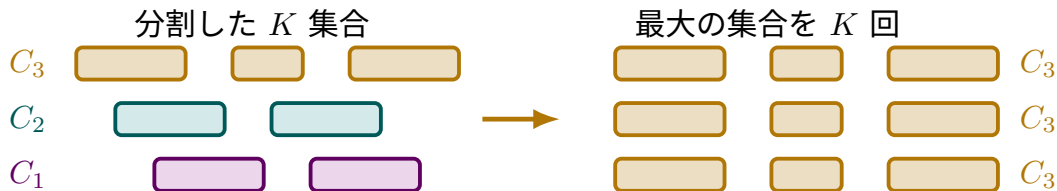
最適解を 1 つ固定しよう！



各位置を覆う区間は高々 K 個であるから、**Dilworth** の定理より、ボタンの押し方は K 個以下の「互いに交わらない区間の集合」に分割できる

I: 証明

分割した集合のコストを $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_K$ とする (足りない分は空集合)



最大コストの集合を K 回連打すると、その得点は KC_K だけど……

$$KC_K \geq C_1 + \dots + C_K = \text{もとの最適値}$$

よって、この押し方も最適になる $\rightarrow$ 最適解はこういう構造だと仮定していい！ Q.E.D.

I: 解法

最適解の構造は、「交わらない区間の集合を1つ選び、それを K 回連打」

これは、**重み付き区間スケジューリング問題**となり、DP で解ける！

- 区間について、コスト $P_L + P_{L+1} + \dots + P_R$ で $L - 1 \rightarrow R$ に有向辺
- $0 \leq i \leq N - 1$ についてコスト 0 で $i \rightarrow i + 1$ に有向辺
- 0 から N に行くための**最大コスト**を求める

$0, 1, \dots, N$ がトポロジカル順なので最大コストは DP で求められる

計算量は累積和を用いて $O(N + M)$ 、 K はフェイクでした

I: 別考察

- 「線形計画法で問題を表現 → 双対を取る」でも同じ結論になる
- 双対取るとコストが「何か」の K 倍になることが示唆されるので、そこで気付くかも
- 自分は最初こっちで解いた 何人かはこのルートで解く気がする

I：統計情報

- AC teams / Trying teams
 - $22 + ? / 26$
- First Acceptance
 - Rinshan Solution (53 min)