

J - Take Many ABA 解説

原案：noya2 問題準備：noya2

J: 問題概要

- $A, B, ?$ からなる文字列 S が与えられる
- S に含まれる $?$ を A, B のいずれかに置き換えて得られる文字列 T すべてに対する、次の問題の答えの総和を 998244353 で割ったあまりを求めよ
- (連続するとは限らない) 部分列 ABA を T から最大で何回取り除けるか?
- $|S| \leq 1000$

J: すぐに頭に思い浮かんでほしいこと

- こんなのはどうせ DP
- T に対する部分問題は解けるのか？
 - これは S に？ が含まれない場合は必ず解かなければならない
- $1/3$ とかがつきそうだし, $O(|S|^3)$ time の解法を目指したい

J: 部分問題を判定問題にする

判定問題

T から ABA を k 回以上取り除けるか? (Yes : 1, No : 0)

- の答えの $k = 1, 2, \dots$ に対する総和が, T に対する部分問題の答え

非負整数 X に対して $X = \sum_{k \geq 1} 1[X \geq k]$

◁ 数え上げで頻繁に出てくる言い換え

J: 判定問題の解法

- ABA の 3 文字目の A として取る部分を決め打って C に変えておく
- T において後ろのほうにある A を優先的に C に変えても損しない!

例: $T = \text{ABBABAAB}$, $k = 2$ のとき

ABBABAAB この A を 3 文字目として取りたい $\rightsquigarrow$ ABBABCCB から ABC を 2 回取れるか?

- T に現れる A のうち後ろ k 文字を C に変えたあと,
- T から ABC を k 回取り除けるか? を考えればよい
- 先頭から順に読んで, 余っている A, AB の個数を管理する
- B が読んだとき, 余っている A があれば AB に進化
- C が読んだとき, 余っている AB があれば ABC が完成

J: 判定問題が解けるということは...?

k を固定しなかったときは前から貪欲に取ることができなかった

→ 固定すると前から見るだけになって DP ができそう!

- $k = 1, 2, \dots$ に対して次の問題を解けばよい!

J2

S から得られる T であって, T から ABA を k 回以上取り除けるようなものの個数を求めよ

$$\text{本問題の答え} = \sum_{T: S \text{ から得られる}} \sum_{k \geq 1} 1[T \text{ に対する部分問題の答えが } k \text{ 以上}]$$

の二重 Σ を入れ替えた形

J2：解法

- T を見る前に、初めて C に変える A の位置を決め打って、前後半で状態を分ける
 - ある時点で「これ以降 A はちょうど k 個現れる」と予約しておく
 - 前半から後半に遷移する際には、十分な個数の A が現れている必要がある
- DP をする. 前半部分では A をそのまま採用するが、後半部分では C として採用する
- 前半部分の DP の状態：余っている A の個数, 余っている AB の個数
 - A を読んだとき：余っている A の個数が増える
 - B を読んだとき：余っている A があれば、1 つ AB にする
 - $?$ を読んだとき：どちらの遷移もできる
- 後半部分の DP の状態：それ以降で現れる予定の A の個数, 余っている AB の個数
 - A を読んだとき：現れる予定の A の個数が 1 減る, AB が余っている必要がある
 - B を読んだとき：余っている A があるはずなので、1 つ AB にする
 - $?$ を読んだとき：どちらの遷移もできる

J: 解法

- J2 を解く DP の計算量は $O(|S|^3)$ time など
 - 状態が $(|S|/3)^2$ 通りくらいあり, $|S|$ 文字読んで遷移するため
- $k = 1, 2, \dots, |S|/3$ で独立に DP すると $O(|S|^4)$ time ? ... **TLE**
- DP の形が k にほとんど依らないことに注目しよう!
- 依存しているのは, 前半部分から後半部分に遷移するとき
 - それ以降で k 個の A が出てくることを予約, 以降 A は C になる
 - この時点で A と AB は合計 k 個余っていないといけない (A はもう来ないので)
- 数え上げるすべての T はこの遷移をちょうど 1 回だけ通る
- $\rightsquigarrow$ この部分だけ複製すればすべての k で **DP を重ね合わせ**られる!

J: まとめ

- 部分問題を答え $\geq k$ の判定問題に言い換えた
- 答え $\geq k$ なる T の個数を DP で数え上げた
- DP の形が k にほとんど依存しないことに注目して、重ね合わせて同時に DP した
 - DP の value(not key) による場合分けがなく, DP 自体が線形変換であることが効いている
- 計算量は $O(|S|^3)$ time, $O(|S|^2)$ space
- 定数倍に $1/18$ とかがついてるので余裕で間に合う

- AC teams / Trying teams
 - $2 + ? / 5$
- First Acceptance
 - Rinshan Solution (28 min)