

K - Empty Intersection 解説

原案：shobonvip,noya2 問題準備：shobonvip

K：問題概要

- 2つの数列 $A = (A_1, \dots, A_N), B = (B_1, \dots, B_N)$ が与えられる。
- A, B についてのスコア $V = (V_1, \dots, V_N), W = (W_1, \dots, W_N)$ も与えられる
- A, B からそれぞれ連続部分列を選ぶ。ただし空でもよい
- A, B から選んだ連続部分列の値の集合が交わらないようなもののうち、そのスコアの最大値を求めよ。

制約

$$N \leq 2 \times 10^5$$

$$1 \leq A_i, B_i \leq N$$

$$1 \leq V_i, W_i \leq 10^9$$

$$\text{マルチテスト } (\sum N \leq 6 \times 10^5)$$

K: 例 (1/2)

$N = 3$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $V = (3, 4, 5)$, $W = (6, 2, 1)$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
A_i / V_i	1 +3	2 +4	3 +5
B_i / W_i	3 +6	2 +2	1 +1

マスの上段が値、下段がスコア

A から区間 $[1, 2]$ 、 B から区間 $[1, 1]$ を選ぶ

値の集合は $\{1, 2\}$ と $\{3\}$ で交わらずスコアは $3 + 4 + 6 = 13$

K : 例 (2/2)

$$N = 3, A = (1, 1, 1), B = (1, 1, 1), V = (2, 3, 4), W = (5, 5, 5)$$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
A_i / V_i	1 +2	1 +3	1 +4
B_i / W_i	1 +5	1 +5	1 +5

マスの上段が値、下段がスコア

A から空集合、 B から区間 $[1, 3]$ を選ぶ。スコアは $5 + 5 + 5 = 15$

K：空集合が許された

さっきの例のように…… **全区間を取る**というのがすごく強い！！ここが観察のポイントとなる

片方を空集合にして、もう片方を全部取るとすると、

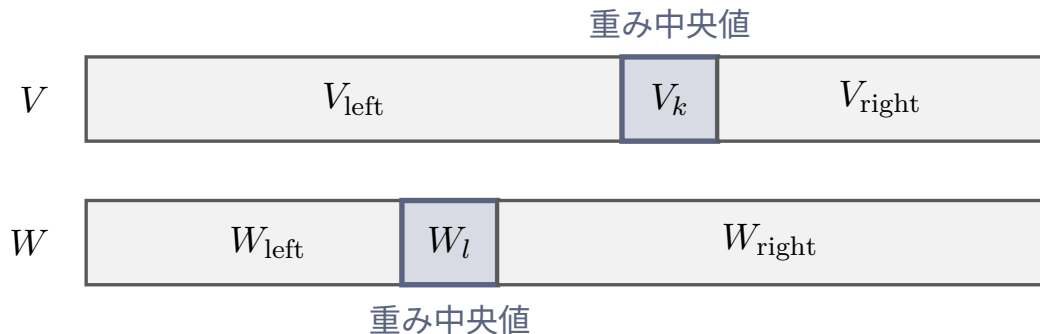
$$\max \left(\sum_i V_i, \sum_i W_i \right)$$

が達成可能

これを超えるにはどうする ??? (一応、例 1 はどちらも全区間を取らないことが最適)

K：重み中央値が重要！

- V の中で、左右それぞれの和が $\frac{1}{2} \sum_i V_i$ 以下となる添字 k が**必ず存在する**
- W についても同様に添字 l を取る



左・中央・右の 3 ブロックを、それぞれ $V_{\text{left}}, V_k, V_{\text{right}}$ と $W_{\text{left}}, W_l, W_{\text{right}}$ とする

K：重み中央値が重要！

そうすると、 V_k, W_l をどちらも含まないようなものが最適になることはない！

例：選ぶ区間が $V_{\text{left}}, W_{\text{left}}$ に完全に含まれてるとする。

$$\begin{aligned}\sum V_{\text{left}} + \sum W_{\text{left}} &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_i V_i + \sum_i W_i \right) \\ &\leq \max \left(\sum_i V_i, \sum_i W_i \right)\end{aligned}$$

こんなのどうやって思い付くの？ (´・ω・`) → コストが全部1のときを考えるとちょっと分かりやすそう でもこの考察は本当に難しい！

K：最適解の構造

- 最適解では、 V_k, W_l のどちらかは必ず含む
- W_l の場合ももう一度解くことにして、「 V_k を含む」と仮定する
- 実は、さっきの考察が一番難しく、この時点でもう**半分以上解けた**と言っても過言ではない！！ その後は自力で解ける人が多いはず

K：解法

ここからは、いろいろなやり方があるが、どちらも典型だと思う

- B 側で分割（非）統治 + セグ木 or SWAG $O(N \log^2 N)$ か $O(N \log N)$
- 単調スタック + 遅延セグ木 $O(N \log N)$

単調スタック + 遅延セグ木方針：「 B の区間 $[j, i]$ を取ったとき、 A 側で添字 k を含むように極大な区間（唯一）を取ったとき、スコアの最大はいくつ？ + $\sum_{j \leq x \leq i} W_x$ 」を求める。
 B を広げると、 A 側の区間は単調に狭くなる $\rightarrow$ これを単調スタック (monotonic stack) で管理！ コストの区間加算・区間最大値は遅延セグ木で行えるので OK。
これを聞くともうできそう（実際できるけどむずいむずい）

- AC teams / Trying teams
 - $0 + ? / 1$
- First Acceptance
 - ??? (??? min)