

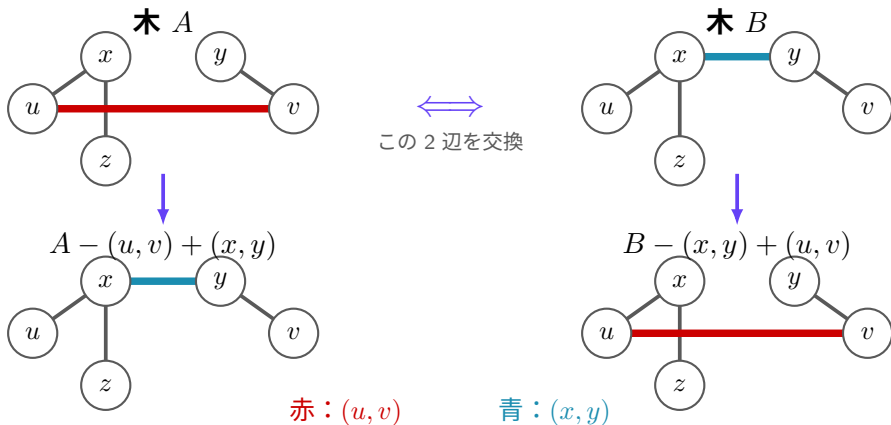
L - Edge Exchanges 解説

原案：noya2 問題準備：Rice_tawara459

L：問題概要

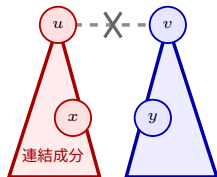
- 同じ頂点集合を持つ N 頂点の木 A, B が与えられる
- A の各辺 (u, v) に対して、次の条件を満たす B の辺 (x, y) を 1 つ求めよ
 - A から (u, v) を取り除いて、代わりに (x, y) を付け加えると、再び木になる
 - B から (x, y) を取り除いて、代わりに (u, v) を付け加えると、再び木になる
- $N \leq 2 \times 10^5$

そのような辺は必ず存在するのか？（問題文は存在すると主張しているが...）

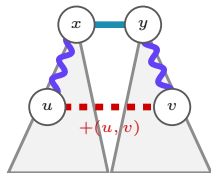


L: 辺の交換の特徴付け

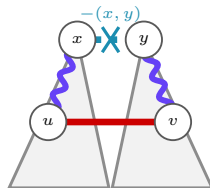
A: (u, v) を削除
2 成分に分かれる



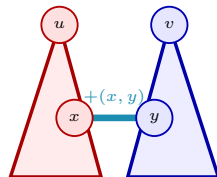
B: (u, v) を追加
閉路ができる



B: (x, y) を削除
閉路を壊す



A: (x, y) を追加
2 成分をつなぐ



L: 解法

- A から (u, v) を取り除いてできる 2 つの連結成分の各頂点を
赤 (u 側) と青 (v 側) で塗り分ける
- B の頂点もその色で塗られていると思うことにする
- B における $u - v$ パスの中から (x, y) を選びたい
- x, y の色が異なっていることが条件！
- そのような (x, y) はどうやって見つければよいか？
- ヒント： u, v の色は異なる
- $u - v$ パス上で **二分探索**！

L: 実装

- (u, v) が固定されたとき, 各頂点 w の色を求める方法
 - $\text{dist}(u, w), \text{dist}(v, w)$ を比較: $O(\log N)$ time ¹
 - 根を取って euler tour + w is in subtree: $O(1)$ time ◁ 覚えておきましょう
- (u, v) パス上の二分探索
 - jump on tree で (u, v) の距離を二等分する点を求める: $O(\log^2 N)$ time
 - LCA でクエリ + HLD or ダブリングで LCA まで登る: $O(\log N)$ time

⇒ 全部あわせて $O(N \log N)$ time

¹sparse table で $O(1)$ time になりはするが, 実装量・速度どちらもそこまで優れてはいない

- 本問題で「実は必ず交換できる」という事実は、閉路マトロイドの strong base exchange property そのもの
- つまり、どんなマトロイドでも成り立つ性質

- AC teams / Trying teams
 - $7 + ? / 16$
- First Acceptance
 - kokuu (101 min)