

M: Max Sum of GCD

原案:someone_

解説:someone_

問題概要

長さ $M (\geq 2)$ の整数列 X に対し、以下の問題を考える

X_1, X_2, \dots, X_M のうち 1 個以上 $M - 1$ 個以下を赤く、それ以外を青く塗る。
赤く塗った整数の gcd を R 、青く塗った整数の gcd を B としたとき、
 $R + B$ として考えられる値の最大値は？

長さ N の整数列 A が与えられるので、 Q 個の A の連続部分列
について上の問題を解け

考察

まず列 X が与えられた場合を高速に解く

- すべての値が同じ場合：自明
- そうでないとき：全ての値は相異なるとしてよい
同じ値は明らかに同じ色で塗ったほうがよいため

以降では $X_1 < X_2 < \dots < X_M$ が成り立つとする

考察

- X_1 と X_M を異なる色で塗る場合：

実は X_M のみを赤く、その他を青く塗るのが最善の 1 つ → 補題①

このときの答えは $X_M + \gcd(X_1, X_2, \dots, X_{M-1})$

- X_1 と X_M を同じ色で塗る場合：

X から X_1, X_M を削除し、 $\gcd(X_1, X_M)$ を挿入したもののについての

元問題と等価

考察

- X_1 と X_M を異なる色で塗る場合：

実は X_M のみを赤く、その他を青く塗るのが最善の 1 つ → 補題①

このときの答えは $X_M + \gcd(X_1, X_2, \dots, X_{M-1})$

- X_1 と X_M を同じ色で塗る場合：

X から X_1, X_M を削除し、 $\gcd(X_1, X_M)$ を挿入したものについての

元問題と等価

補題①の証明

X_i ($i \neq 1, M$) を赤く塗ったとする。このとき $R \leq \gcd(X_M, X_i) < X_M$ である。

R は X_M の約数だから、 $R = \frac{X_M}{k}$ を満たす整数 k が存在する。

X_i は R の倍数だから、 $X_i \leq \frac{(k-1)X_M}{k}$ が成り立つ。

B は X_1 の約数だから、 $B \leq X_1 < X_i \leq \frac{(k-1)X_M}{k}$ が成り立つ。

$R + B \leq \frac{X_M}{k} + \frac{(k-1)X_M}{k} = X_M$ が得られたが、 X_M のみを赤く塗った場合の解は $X_M + 1$ 以上なので、これは最大となり得ない。

考察

- X_1 と X_M を異なる色で塗る場合：

実は X_M のみを赤く、その他を青く塗るのが最善の 1 つ → 補題①

このときの答えは $X_M + \gcd(X_1, X_2, \dots, X_{M-1})$

- X_1 と X_M を同じ色で塗る場合：

X から X_1, X_M を削除し、 $\gcd(X_1, X_M)$ を挿入したもののについての

元問題と等価

考察

- X_1 と X_M を異なる色で塗る場合：

実は X_M のみを赤く、その他を青く塗るのが最善の 1 つ → 補題①

このときの答えは $X_M + \gcd(X_1, X_2, \dots, X_{M-1})$

- X_1 と X_M を同じ色で塗る場合：

X から X_1, X_M を削除し、 $\gcd(X_1, X_M)$ を挿入したもののについての

元問題と等価

繰り返すと、結局最適解の候補は「 X_i を赤く、他を青く塗る」の M 種類

考察

さらに塗り方の候補を減らせる

実は赤く塗る候補は大きい方から 2 つのみ→補題②

考察

さらに塗り方の候補を減らせる

実は赤く塗る候補は大きい方から 2 つのみ→補題②

補題②の証明

X_i ($i \leq M - 2$) を赤く、それ以外を青く塗ったとする。

$R = X_i$ である。また $B \leq \gcd(X_M, X_{M-1}) \leq X_M - X_{M-1}$ である。

$R + B \leq X_i + (X_M - X_{M-1}) \leq X_M$ であるから、これは最適でない。

ちなみに最大値のみだと嘘： $X = (3, 5, 6)$

考察

さらに塗り方の候補を減らせる

実は赤く塗る候補は大きい方から 2 つのみ → 補題②

よって (最大値, 2 番目の最大値, それ以外の gcd) を乗せた

セグメント木などで解ける

統計情報

- Acceptances
 - 5 + 4 teams
- First Acceptance
 - suzukaze_Akabayama (79 min)