

C: Commutativity

原案 : mtsd, pachicobue

問題文 : pachicobue

データセット : mtsd

解答 : mtsd, pachicobue, smiken, hos

解説 : pachicobue

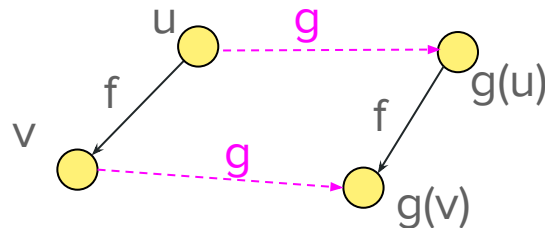
問題概要

- $\{1,2,\dots,N\} \rightarrow \{1,2,\dots,N\}$ の写像 f が与えられる
 - $1 \leq N \leq 5000$

- $\{1,2,\dots,N\} \rightarrow \{1,2,\dots,N\}$ の写像 g で、 $f \circ g = g \circ f$ が成立するようなものを数え上げよ
(mod 998244353)
 - $x=1,2,\dots,N$ 全てについて、 $f(g(x)) = g(f(x))$ が成立すること

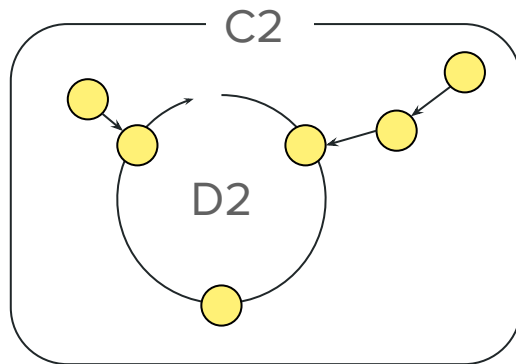
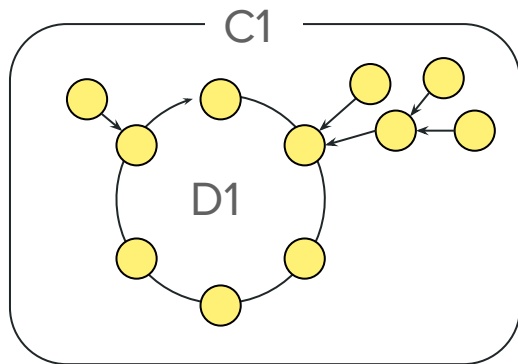
解法 (Graphに言い換え)

- 写像 f を N 頂点の Functional Graph G_f に置き換える
 - 頂点 i から頂点 $f(i)$ に有向辺をつなぐ ($i=1,2,\dots,N$)
- 「 $f \circ g = g \circ f$ であること」は以下と同値
- 「任意の有向辺 $u \rightarrow v$ に対して、有向辺 $g(u) \rightarrow g(v)$ も G_f 内に存在する」



解法 (Graphに言い換え)

- G_f の弱連結成分を C_1, C_2, \dots, C_k とおく
- G_f の各弱連結成分に含まれる有向サイクルを D_1, D_2, \dots, D_k とおく

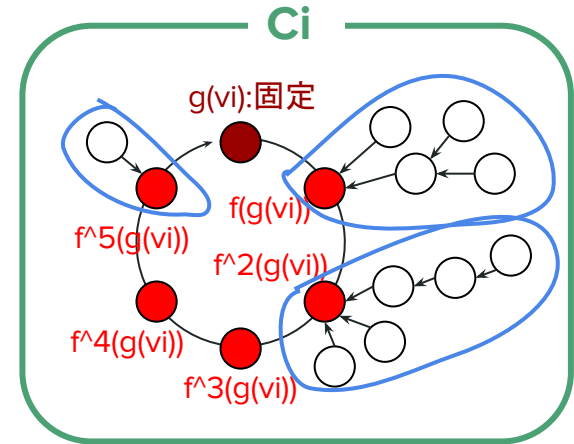


解法 (g の性質)

1. 同じ弱連結成分の元 v_1, v_2 について、 $g(v_1)$ と $g(v_2)$ は同じ弱連結成分に属する
 - v_1 から v_2 をつなぐパスが存在すれば、 $g(v_1)$ から $g(v_2)$ をつなぐパスが存在するので
2. サイクル D_i の元 v_i について、 $g(v_i)$ が決まれば D_i 全体で g の値が決まる
 - 頂点 $g(v_i)$ から G_f の有向辺を k 回辿ればいい
3. サイクル D_i の元 v_i について、 $g(v_i)$ はあるサイクル D_j に属し、 $|D_j|$ は $|D_i|$ の約数
 - 頂点 v_i から v_i への長さ $|D_i|$ のループが存在するので、頂点 $g(v_i)$ から $g(v_i)$ への長さ $|D_i|$ のループが存在
4. 異なる弱連結成分に対する g の割り当ては独立

解法(弱連結成分への割り当ての数え上げ)

- 性質4より各弱連結成分 C_i に対する g の割り当て方を数え上げられれば良い
 - 答えは総積
- サイクル D_i の代表元 v_i に対する $g(v_i)$ の値を固定する
 - 性質3より D_i の約数サイズのサイクル D_j の元のどこか
 - 性質2より D_i の各元 v に対する $g(v)$ も自動的に決まる
- 各木への g の割り当ては独立に考えていい
 - (根以外は)異なる部分木同士は直接辺で結ばれていない
 - 根の値と矛盾しない部分木への割り当て方を数え上げたい



解法(部分木への割り当ての数え上げ)

- 次のDP表を前計算しておく
- $dp[i][j]$ = (頂点 i の部分木に対する割り当てで、 $g(i)=j$ となる通り数)
 - $dp[i][j] = \prod_{p:i\text{の一個手前}} (\sum_{q:j\text{の一個手前}} dp[p][q])$ にしたがって、 i, j のトポロジカル順序でDP表を埋めていく
 - 配るDPや累積和などを使えば $O(N^2)$ で埋められる
- 前頁の木への割り当てパターン数はDP表を引けば $O(1)$ で求められる。
 - $dp[f^k(v_i)][f^k(g(v_i))]$ に等しい
 - $g(v_i)$ は最初に固定したやつ

解法(計算量)

- dp表を使うことで、 $g(v_i)$ を固定した場合の C_i への割り当てパターン数が $O(|D_i|)$ で計算できる
- $g(v_i)$ の候補が $O(N)$ 通りなので、トータル計算量は $\sum_i O(|D_i| N) = O(N^2)$

ジャッジ解

- mtsd (C++): 84 lines, 1943 B
- pachicobue (C++): 143 lines, 3625 B
- smiken (C++): 149 lines, 2368 B
- hos (C++): 235 lines, 7182 B

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 2 + 2 / 5
- First Acceptance
 - Seventh Sense (02:59)