C: Communication between islands

問題概要

- 木が与えられ、頂点 r にコインが 1 枚だけ乗っている
- 次の操作を繰り返す：
  - 適当な頂点 u に乗っているコインを 1 枚選び削除する。
    その後、頂点 u に隣接する頂点を 2 つ選び、
    それぞれにコインを 1 枚ずつ置く。選ぶ 2 頂点は同じでもよい
- 全ての頂点にコインが 1 枚以上乗った状態にするには
  最低何回の操作が必要か？という問題をすべての r に対して解け

<制約>

- $1 \leq N \leq 3 \times 10^5$

解法

- 自明な下界： $N-1$ 回

- 頂点 r からの距離が偶数の頂点に $+1$ 、奇数の頂点に -1 の重みをつける
- コインが乗った頂点の重み和 % 3 は不変量になっている
= 全頂点の重み和 % 3が 1 でなければ $N-1$ 回は達成できない

- 実は上の重み和 % 3 が 1 なら $N-1$ 回、
そうでないなら N 回が答えになる

証明の概略

- 頂点 r を根とする頂点 v の部分木について、頂点 v からの距離が偶数の頂点に $+1$ 、奇数の頂点に -1 の重みをつけた総和 % 3を $S_{r,v}$ と定める
- 頂点 v の子全体を $ch[v]$ で表すとき、定義から $S_{r,v} = \left(1 - \sum_{v' \in ch[v]} S_{r,v'}\right) \% 3$ で計算できる
- この $S_{r,v}$ は、頂点 v に $S_{r,v}$ 枚のコインがあれば v の部分木に 1 枚ずつコインを置ける、という性質を満たす

証明の概略

- $S_{r,v}$ は、頂点 v に $S_{r,v}$ 枚のコインがあれば
  v の部分木に 1 枚ずつコインを置ける、という性質を満たす
  - ただし、 $S_{r,v} = 0$ だけいくつか言いかえが必要
    - コインが x 枚あれば部分木を覆ったうえで、
      頂点 v にコインが x 枚ある状態にできる $(x = 1, 2, 3)$
  - 証明は帰納法 + 構成的な方法による
- $S_{r,r} = 1$ ならば $N - 1$ 回で操作可能なのは上の性質から従う
- $S_{r,r} = 2$ ならば頂点 r に隣接する頂点 v は $S_{v,v} = 1$ を満たすので、
  最初の操作で適当な頂点にコインを送れば N 回で達成可能
- $S_{r,r} = 0$ ならば上の議論から r にコインが 2 枚ある状態にできる
  $\rightarrow$ 最終的に $N + 1$ 枚のコインがあるので N 回の操作で達成可能

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 7 + ? /
- First Acceptance
  - o3-kayama (87 min)