D: Paper Cut Game

原案：mtsd
問題文：kkt89
データセット：smiken
解答：kkt89, hos, smiken
解説：smiken

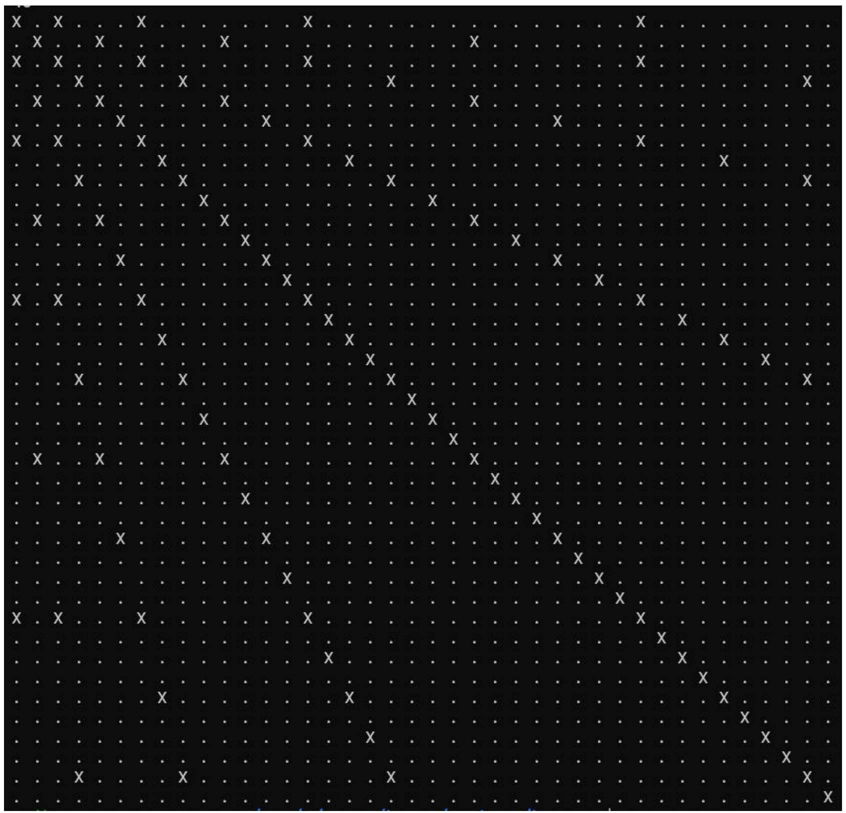
問題概要

- H*Wマスからなる紙がある
- 2人で交互に以下の操作を行う
  - 紙をマスに沿って縦または横に分割し、面積の小さいほうを捨てる
- 操作ができなくなったら負け
- 最適行動をとると先手後手どちらが勝つか？

解法1

実験してH,Wを二次元にプロットすると規則性が見える

条件を解読して数式化



解法２

縦に切る操作と横に切る操作は互いに干渉しない。

「長さHの棒とWの棒があり、各ターンで好きな棒選び分割して短い棒片を捨てる」というゲームと同じ。

→1次元の問題で Grundy数を求めればよい。

0 0 1 0 2 1 3 0 4 2 5 1 6 3 7 0 8 4 9 2 10 5 11 1 12 6 13 3 14 7 15 0 16 8 17 4 18 9 19 2

これは、**G[i] = i/2 if iは偶数 else G[(i-1)/2]** と推測できる

縦に切るゲームのGrundy数と横に切るゲームのGrundy数の排他的論理和が0かどうかで判定可能

解法3

h <= w の条件下で**非負整数 k を用いて「w = 2^k (h+1) - 1」と書けること** が後手必勝の条件

例： h = 5 のとき w = 5, 11, 23, 47, 95 …

[証明]

先手の手番で条件を満たすとき
- h=w (つまりk=0)のときは先手の真似をすることで後手必勝
- h<w (つまりk>0)のときは先手がh,wどちらを変えても
  - 先手がh → h’としたとき後手は w → 2^k (h’+1)-1 とする 例: (5,47) → (3,47) → (3,31)
  - 先手がw → w’としたとき後手は w’ → 2^(k-1) (h+1)-1 とする 例: (5,47) → (5,30) → (5,23)

 後手の操作で「w = 2^k (h+1) - 1」の条件を満たす状態に持っていける

解法３

h <= w の条件下で**非負整数 k を用いて「w = 2^k (h+1) - 1」と書けること** が後手必勝の条件

例： h = 5 のとき w = 5, 11, 23, 47, 95 ...

[証明 つづき]

先手の手番で条件を満たさないとき
- 先手が w を変更することで w’ = 2^k (h+1) - 1 を満たす状態で後手に渡せる

以上の性質を使って帰納法で証明可能。

ジャッジ解

kkt89	35 lines
hos	85 lines
smiken	34 lines

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 25 + 2 / 27
- First Acceptance
  - KUB234 (0:23)