E: Ball Passing

原案 : mtsd (special thanks: tatyam)
問題文 : pachicobue
データセット : mtsd
解答 : mtsd, pachicobue, smiken, hos
解説 : mtsd

問題概要

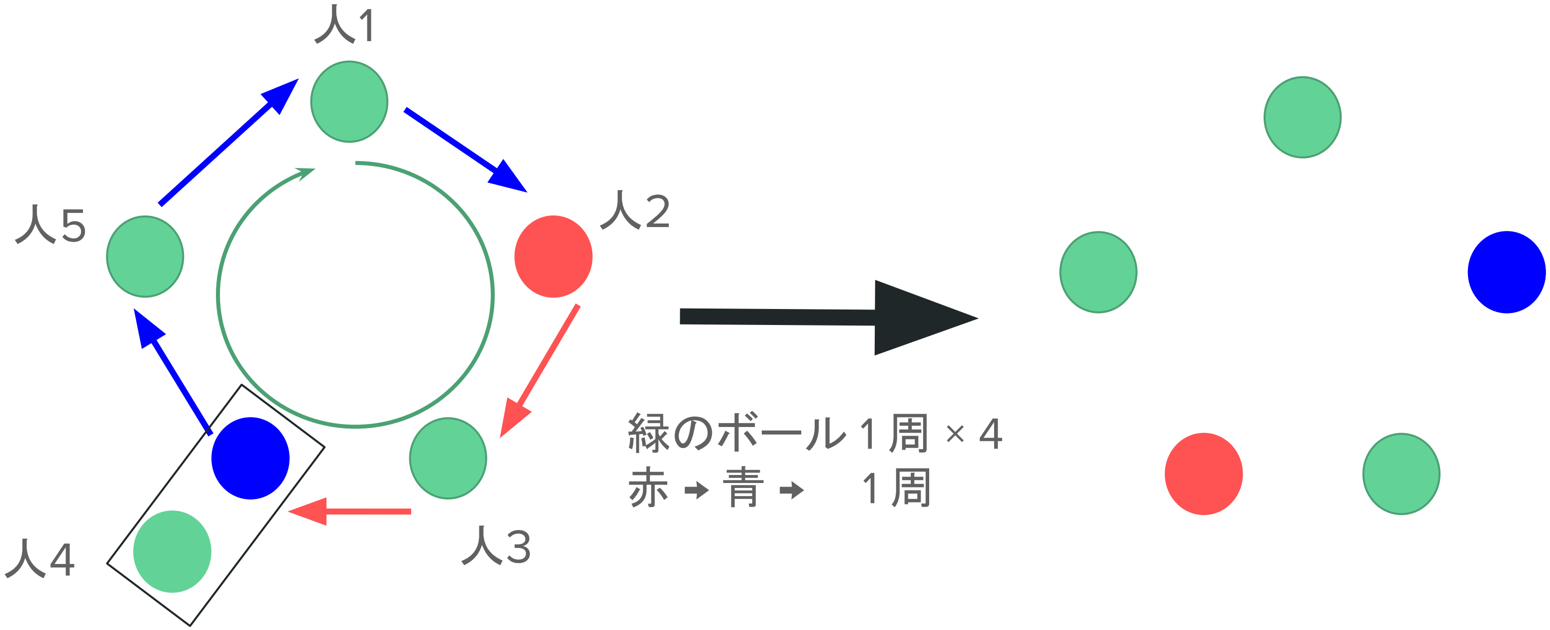
- N 色のボールが M 個ずつ存在し、円環上に並んだ N 人に M 個ずつ配られる
- 以下の操作 NM 回以内で全員が 1 色だけを持った状態にせよ
 (不可能ならばそれを報告せよ)

操作 : N 人が同時に自分の持っているボール 1 個を右隣の人に渡す

(i 番目の人が (i+1)%N + 1 番目の人に渡す)

目標の達成可能性

- 必ず全員同時に色を揃えることが出来る
- 以下のようにすればN回でswapが可能（回数を無視すればこれで揃えられる）



NM 回で達成するには

1. **(M-2) N 回で、各人に対して M-1 個同じ色の球を揃える**

- ホールの結婚定理より、人と持っている色で完全マッチングが存在
  - 揃える色を適切に決めると、初期状態で必ず 1 個は持っている
- k 個持っている状態から k+1 個持っている状態には N 回で遷移可能
  - まだ揃っていない色 1...N のボールを 1 個ずつ取ってきて、
    揃えたい人から遠いボールを優先的に隣の人に渡す貪欲をすると、
    実は N 回以内で色 1...N のボール 1 つを揃えたい人に動かすことが可能

NM 回で達成するには

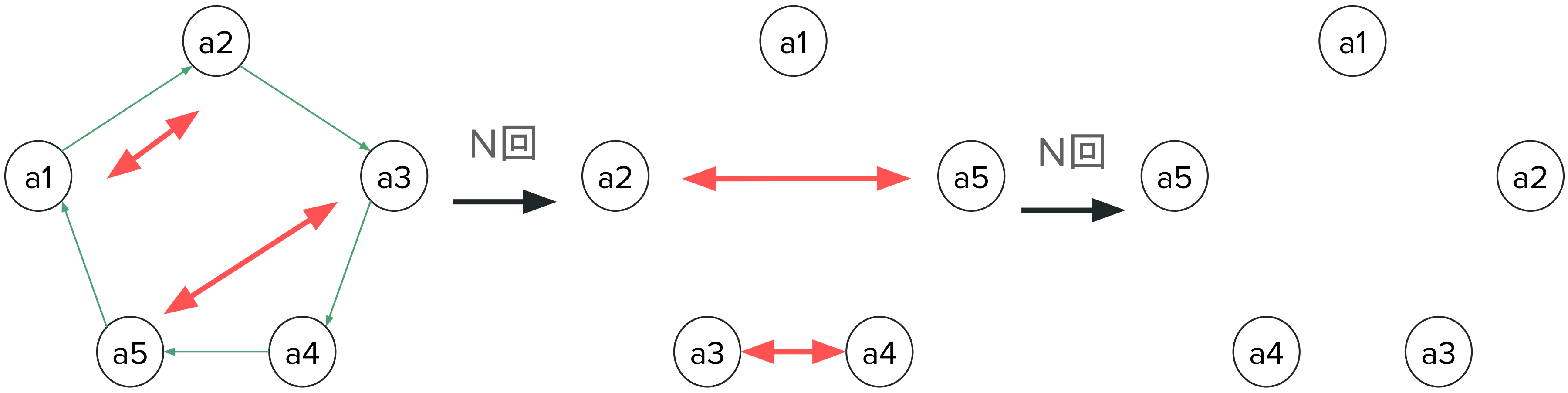
2. 2N 回で M = 2 の場合を揃える

- 人1 は (色1, 色P_1), 人2 は (色2, 色P_2), … , 人Nは (色N, 色P_N) を持っているとする
- x -> P_x -> P_(P_x) … -> x となるようなサイクルに沿って揃えることにする
  - a_1 -> a_2 -> … -> a_k -> a_1 というサイクルとする
- ポイントとなる操作 :

  N 回の操作によって、(x_1, y_1), … , (x_t, y_t) (要素に重複がない) の位置を同時に swap することが出来る (前述の swap 操作を同時に行うことが出来る)

swap 2回によってサイクルを揃える方法の図解

奇数の場合の例は下図の通り（偶数の場合も同様）
※以下の図において、a_1 < a_2 < a_3 < ... とはなっていないことに注意
（swap の方法と同様にサイクルの順に回す方法では最悪 N(N-1) 回かかる）



まとめ

1. **(M-2) N 回で、各人に対して M-1 個同じ色の球を揃える (M=2 への帰着)**
2. **2N 回で M = 2 の場合を揃える**

以上より、MN 回で各人に対して揃えることが出来る

おまけ : 実は M = 2 を N 回で揃えることもできるらしいです (hos さんより)

おまけ2 : 揃える色を乱択＋貪欲のヒューリスティック解法が非常に強いです
落とす or 証明する ことは出来ませんでした

ジャッジ解

- mtsd (C++): 161 lines, 4448 B
- pachicobue (C++): 223 lines, 6163 B
- smiken (C++): 216 lines, 3664 B
- hos (C++): 387 lines, 11533 B

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 0 + 0 / 5
- First Acceptance
  - N/A