

E: Box Tower II

原案: Dispersion

問題文: riantkb

データセット: KKT89

解答: kkt89, kotatsugame, shobon

解説: Dispersion

問題概要

- 各面が白 or 黒で塗られた箱が N 個あり、クエリが Q 個飛んでくる
- 箱 $L_i, L_i + 1, \dots, R_i$ に対し、次の条件を満たすか判定せよ:
 - 箱の数を $S = R_i - L_i + 1$ とする
 - これらの箱を回転させ積み上げることで $1 \times 1 \times S$ の箱のタワーを作る
 - このタワーのどの側面も $S/2$ 個の白い面と $S/2$ 個の黒い面からなる

制約

- $1 \leq N \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq Q \leq 2 \times 10^5$

Problem D Box Tower

Time Limit: 3 seconds

同じ大きさの立方体の箱が N 個ある。箱の各面には色が塗られており、各色は 1 以上 $6N$ 以下の整数で表される。ここからいくつかの箱を選び、それぞれを回転させた後、縦に積み上げることで、1 本の箱のタワーを作ろうとしている。各箱は回転させて向きを決めた後、すべての箱の上面と下面が水平になるように置き、底面がぴったり重なるように真上に積み上げるものとする。

箱のタワーの美しさは、タワーの各側面に使われる色の系統がまとまっているかで決まる。ここでは、次の条件を満たすものを「美しいタワー」と呼ぶ：

- タワーの 4 つの側面に 1, 2, 3, 4 の番号を付ける。側面 i に現れる色の最小値を m_i 、最大値を M_i とする。このとき、任意の $1 \leq i < j \leq 4$ について、区間 $[m_i, M_i]$ と $[m_j, M_j]$ が共通部分を持たないならば、そのタワーは美しい。

Figure D-1 に、サンプルの 1 つ目のテストケースの箱を用いて作れる、美しいタワーの例と美しいタワーの例を示す。なお、図中の数値は各面に塗られた色を表す。左の美しいタワーでは、各側面に使われている色の範囲の集合は $\{[1, 3], [5, 8], [9, 11], [13, 15]\}$ であり、どの 2 つの区間も共通部分を持たない。一方、右の美しいタワーでは、その集合は $\{[2, 6], [5, 8], [9, 12], [13, 15]\}$ であり、 $[2, 6]$ と $[5, 8]$ が共通部分を持つため美しいタワーではない。

タワーの高さを、そのタワーに使われている箱の個数としたとき、美しいタワーの高さの最大値を求めよ。

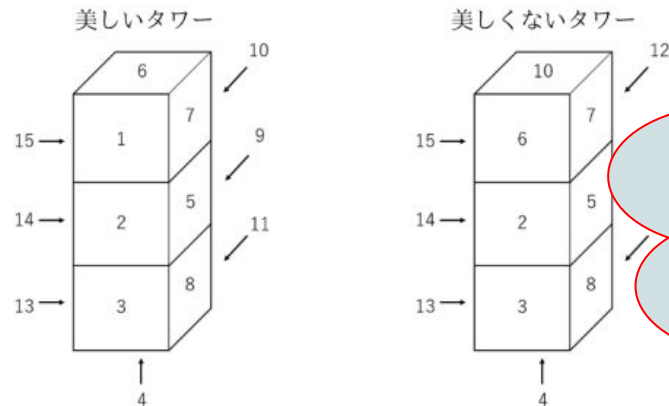


Figure D-1: 美しいタワーの例（左）と美しいタワーの例（右）

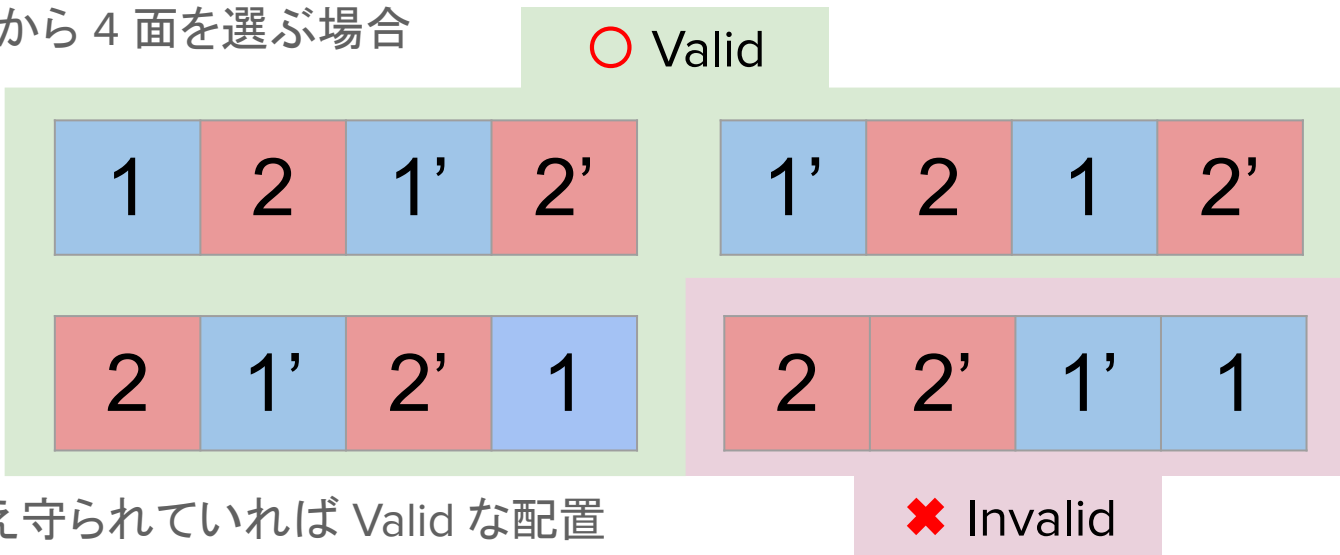
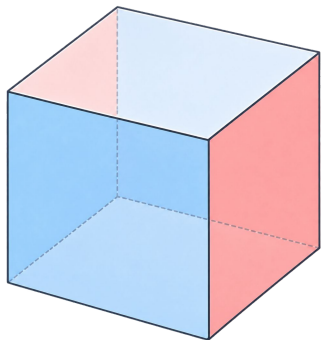
$$N \leq 6$$

$$\rightarrow N \leq 2 \times 10^5$$

Box Tower 2 では
さらに多くの箱が登場

考察

- クエリであることを一旦無視し、箱 1 ~ N に対する判定を考える
- N : 偶数は必須
- 側面を切り開き、箱から 4 面を選ぶ場合



- 実は表裏の条件さえ守られていれば Valid な配置
→ 3 つある対面の組から 2 つ選ぶ問題とみなせる

考察(問題の言い換え)

Note: N は偶数

- 各箱について「3 つある対面の組から 2 つ選ぶ」→ どんなときに *balanced* か？
- 対面の組としては (白, 白), (白, 黒), (黒, 黒) がありうる
- 選択した 1 つ目の組を G_1 に、2 つ目の組を G_2 に入れることにする
- G_1 は N 組 $2N$ 個の色からなるが、 N 個は白 & N 個は黒の必要がある
 - $\#(\text{白}, \text{黒})$ の寄与が 0 であることを考えると $\#(\text{白}, \text{白}) = \#(\text{黒}, \text{黒})$ が **必要条件**
 - これは **十分条件** でもある: このとき $\#(\text{白}, \text{黒})$ は偶数なので適当に構築可能
- $-1, 0, +1$ からなる 3 つ組 (X_i, Y_i, Z_i) がある。
 i ごとに X_i, Y_i, Z_i を並び替えることで、 $\sum X_i = \sum Y_i = 0$ にできるか判定せよ

目標: (X_i, Y_i, Z_i) を並び替えることで、 $\sum X_i = \sum Y_i = 0$ にできるか？ ただし、各要素は $-1, 0, +1$ のいずれか

条件1

- ただの部分 and dp だと $O(N^3)$ time なので
「 (X_i, Y_i, Z_i) は $-1, 0, 1$ のいずれかからなる」を使う必要があるはず
- (説明の都合上、やや直感的でない順番で説明します)
- 仮に $\sum (X_i + Y_i) = 0$ にできたとして $\sum X_i = \sum Y_i = 0$ にできるかを考える
- これは次が必要十分条件:
(*) 「 $\text{abs}(X_i - Y_i) = 1$ なる i が 0 個 & $\text{abs}(X_i - Y_i) = 2$ なる i が 奇数個」**以外**
 - 例えば $(X_i, Y_i) = (-1, +1), (0, 0), (+1, +1), (-1, -1)$ は不可能
 - パリティに注目する & 構成的に行うことで証明可能
- 条件 (*) と $\sum (X_i + Y_i) = 0$ を満たす (X_i, Y_i, Z_i) の swap がありますか？
という話になった

準備

目標: 条件 (*) と $\sum (X_i + Y_i) = 0$ を満たす (X_i, Y_i, Z_i) の swap はあるか？ ただし、各要素は -1, 0, +1 のいずれか

- 以降、 $(++0)$ で X_i, Y_i, Z_i のうち 2 つが +1, 残り 1 つが 0 の要素を表すとする
- 3 つ組の多重集合としてありうるものは
 $(+++), (++0), (++-), (00+), (000), (00-), (--+), (--0), (---), (+-0)$ の計 10 種類。
これらの個数を $A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D$ で表すことにする
- 上の列挙した順番で (X_i, Y_i, Z_i) を仮置きしたのち、目標を目指す

条件2

目標: 条件 (*) と $\sum (X_i + Y_i) = 0$ を満たす (X_i, Y_i, Z_i) の swap はあるか？ ただし、各要素は -1, 0, +1 のいずれか

- (X_i, Y_i, Z_i) を (+++), (++0), (++-), (00+), (000), (00-), (--+), (--0), (---), (+-0) の順になるよう仮置きし、これらの個数を $A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D$ とする
- 仮置き時点の和は $\sum (X_i + Y_i) = (A1+A2+A3) - (C1+C2+C3) =: S$ のため $\sum Z_i$ を S だけ増やしたい
- $(++0), (00-), (00+), (--0), (+-0)$ の swap による $\sum Z_i$ の変化量を Δ とするとき、 $\sum Z_i$ を S 増やすには次が必要:
$$\Delta - 2 \times C1 \leq S \leq \Delta + 2 \times A3$$
$$\Leftrightarrow S - 2 \times A3 \leq \Delta \leq S + 2 \times C1$$
 - $\sum Z_i$ の変化量としてありうるのは -2, -1, 0, +1, +2 であり、それぞれの寄与に注目するだけ

考察

目標: 条件 (*) と $\sum (X_i + Y_i) = 0$ を満たす (X_i, Y_i, Z_i) の swap はあるか？ ただし、各要素は -1, 0, +1 のいずれか

- 以下、場合分け。次の条件を満たしつつ目標を達成できるかを考える
- (i-a) $\Delta > 0$ のとき
 - $|\Delta|$ 個の箱について、仮置きの状態から Z_i を +1 変化させなければならないため $2 \leq \Delta \leq A_2 + B_3 + D$ が必要であり、このとき条件 (*) は自然に満たされる
- (i-b) $\Delta < 0$ のときも同様
- (ii-a) $\Delta = 0$ & $\text{abs}(X_i - Y_i) = 1$ を一つも作らないとき
 - これは $D + S/2 \equiv 0 \pmod{2}$ と言い換えられる
- (ii-a) $\Delta = 0$ & $\text{abs}(X_i - Y_i) = 1$ を一つも作らないとき
 - これは Z_i について +1, -1 の変更をどちらも行うことを表すため、必要十分条件は $(C_2 + B_1) + D > 0$, $(B_3 + A_2) + D > 0$, $(C_2 + B_1) + (B_3 + A_2) + D \geq 2$ と表せる

まとめ

- 条件2に注意すると、次のいずれかを満たすことが必要十分条件である:
 - (i-a) $[S - 2 \times A3, S + 2 \times C1] \cap [2, A2+B3+D] \neq \emptyset$
 - (i-b) $[S - 2 \times A3, S + 2 \times C1] \cap [- (C2+A1+D), -2] \neq \emptyset$
 - (ii-a) $-2 \times C1 \leq S \leq 2 \times A3 \quad \& \quad D + S/2 \equiv 0 \pmod{2}$
 - (ii-b) $-2 \times C1 \leq S \leq 2 \times A3 \quad \& \quad (C2+B1)+D > 0 \quad \& \quad (B3+A2)+D > 0 \quad \& \quad (C2+B1)+(B3+A2)+D \geq 2$
- そういえば元の問題はクエリであったが、以上の条件は区間内の要素数の和に関する条件であるため、累積和などで対応可能

ジャッジ解

● kkt89	C++	121 lines,	3.1kB
● kotatsugame	C++	290 lines,	4.9kB
● not (astra)	C++	68 lines,	2.3kB
● riantkb (chatgpt)	C++	169 lines,	3.8kB
● riantkb (chatgpt)	Python	122 lines,	2.8kB

統計情報

- AC teams
 - 0 + 4 teams
- First Acceptance
 - polyrhythm (251 min)