

F: Halfway Through the Book

原案 : potato167

問題文 : mtsd

データセット : smiken

解答 : hos, mtsd, smiken

解説 : smiken

問題概要

- 要素数 N の順列が与えられる。
- 順列の空でない部分列は $2^N - 1$ 個あるが、これらを辞書順でソートしたときに真ん中にあたる数列を求めよ。

例: $P = [2, 3, 1]$

部分列を辞書順に並べると $[1], [2], [2, 1], [2, 3], [2, 3, 1], [3], [3, 1]$ なので $[2, 3]$

解法 1/5

求めたい数列の先頭から貪欲に決めていく

元の問題は辞書順で $m = 2^{(N-1)}$ 項目を求めたいので
m から先頭が 1 の部分列の個数, 先頭が 2 の部分列の個数... を引いていき、
0以下になるところが先頭の値になる

数列が確定するまで次の項を求める処理を繰り返す

解法 2/5

便宜上 入力の先頭に $P[0] = 0$ を追加し $N+1$ 項の順列とする。

$f(k,m) :=$

P の k 項目以降からなる数列の部分列で P の k 項目を必ず使うものは $2^{(N-k)}$ 個あるが、これらのうち辞書順で小さい方から m 番目の配列

これは再帰的に求めることができる。この問題では $f(0, 2^{(N-1)})$ を求める。

解法 3/5

便宜上 入力の先頭に $P[0] = 0$ を追加し $N+1$ 項の順列とする。

$f(k,m) :=$

P の k 項目以降からなる数列の部分列で P の k 項目を必ず使うものは $2^{(N-k)}$ 個あるが、これらのうち辞書順で小さい方から m 番目の配列

これは再帰的に求めることができる。この問題では $f(0,2^{(N-1)})$ を求める。

例) $N=3, P = [0,2,3,1]$

$f(0,4) = [0] + f(1,2) = [0,2] + f(2,0) = [0,2,3]$

解法 4/5

便宜上 入力の先頭に $P[0] = 0$ を追加し $N+1$ 項の順列とする。

$f(k,m) :=$

P の k 項目以降からなる数列の部分列で P の k 項目を必ず使うものは $2^{(N-k)}$ 個あるが、これらのうち辞書順で小さい方から m 番目の配列

これは再帰的に求めることができる。この問題では $f(0, 2^{(N-1)})$ を求める。

再帰の深さは高々 N 回, 次の値の候補は 高々 N 個なので $O(N^2)$

ただし m は $2^{(N-1)}$ から始まるので 非常に大きな値の加減算が必要

解法 5/5

今回必要な演算は N bit の整数 m に対して

- 2べきの数と大小比較を行う
- 2べきの数を引く

の2種類を $O(N^2)$ 回行えばよい。

実は m を二進数で持ち、愚直に繰り下がり計算すればこの処理は $O(N^2)$

[略証]

一度の引き算で変化する桁の個数は以下の通り

- $0 \rightarrow 1$ に変換する桁は 0 個以上 (繰り下がり)
- $1 \rightarrow 0$ に変換する桁は 1 個

K 回目までの引き算で繰り下がりの起きる桁数の合計は最初の m にある 0 の個数 $+ K$ で抑えられる (繰り下がりをするためには 0 を作る必要があることから従う)

ジャッジ解

- hos 99 lines
- mtsd 47 lines
- smiken 89 lines

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 8 + 3 / 19
- First Acceptance
 - Screenwalkers (0:25)