H: Max of Mod

問題概要

- 整数の集合 $S = \{L, L+1, \dots, R\}$ が与えられる
- S が 0 を含まない限り次の操作を行える：
  - 正整数 $g \leq \max(S)$ を 一つ選び、
    S の各要素を g で割ったあまりに置き換える
- 操作は最大で何回行えるか？

<制約>

- テストケース数： $1 \leq T \leq 10^5$
- $1 \leq L, R \leq 10^9$

解法

- 0 が含まれないため、S の要素は常に一つの区間となる
- $[L, R]$ からの行き先は $[L-x, R-x]$ で表される。
  ただし、$x = \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 2 \ \ldots, L-1$
- つまり、$[8,9] \rightarrow [1,2]\ or\ [2,3]\ or\ [3,4]$ みたいな構造になっている

- 直感的には数が大きい区間のほうが有利そう
  - そして、これは正しい

証明

- $[L, L+k]$ から $[l, l+k]$ に遷移可能なとき、
  $[L+1, L+1+k]$ から $[l, l+k]$ に遷移可能であることを示す
- $[L, L+k]$ から $[l, l+k]$ に遷移可能であるため、$l < \frac{L}{2}$ が成立する

- $[L+1, L+1+k]$ に対し $g = L+1-l$ を選ぶ
- $g > \frac{L+1}{2}$ より $(L+1)\%g = L+1-g = l$ となるため、
  $[L+1, L+1+k] \to [l, l+k]$ と遷移する

解法

- $[L,R]$ からの行き先は $[L-x,R-x]$ で表される。
  ただし、$x=\left\lfloor\frac{R}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{R}{2}\right\rfloor+2\ \ldots,L-1$
- これは $x=\left\lfloor\frac{R}{2}\right\rfloor+1$ のときに数が最も大きい区間になる

- したがって、$S=[L,R]$ に対し $g=\left\lfloor\frac{R}{2}\right\rfloor+1$ を選択し続ければよい
- 一度の操作で R は半分以下になるので、操作回数は $O(\log R)$ 回

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 23 + ? /
- First Acceptance
  - Tsukuyom1 (10 min)