

J: Draw The Tree

原案 : mtsd

問題文 : pachicobue

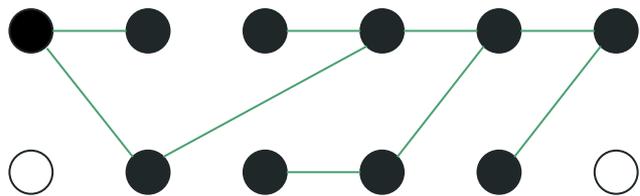
データセット : mtsd

解答 : mtsd, pachicobue

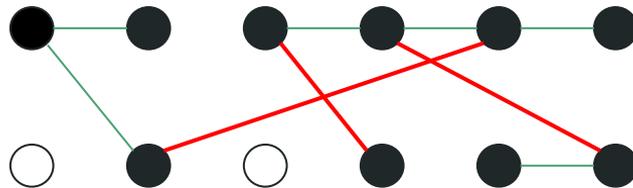
解説 : pachicobue

問題概要

- 与えられた木を $2 \times M$ のグリッド上に描画したい
 - 頂点数 N は $1 \leq N \leq 50,000$
- ただし辺は線分で描画し、辺同士が「交差」してはいけない
- 描画可能か判定し、可能なら M の最小値を求めよ



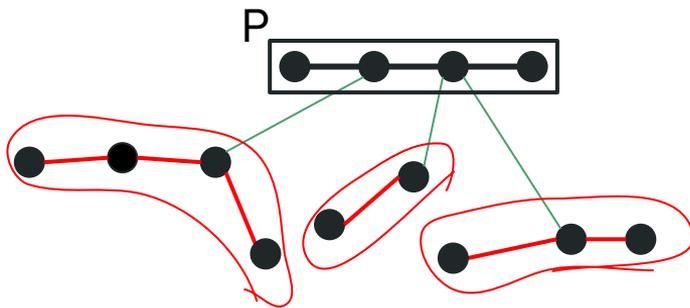
OK



NG

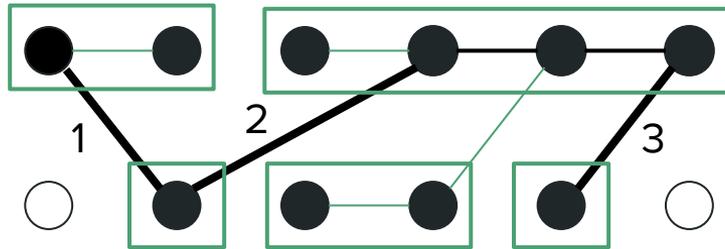
解法(判定パート)

- 「木Tが描画可能」という条件は以下の条件と同値
- 「T上のあるパスPが存在し、Pに含まれる頂点を取り除いたとき、Tに残った連結成分が全てパス(or 孤立点)となる」



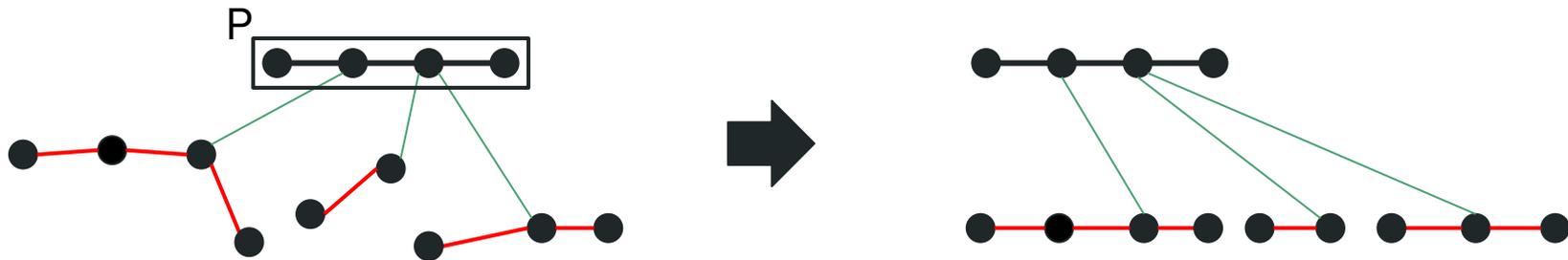
解法(判定パートの証明イメージ1)

- 「木Tが描画可能」ならば「条件を満たすパスPが存在」
 - 水平方向の辺による連結成分を「区間」と呼ぶことにする
 - 最も左の縦辺から始めて、端点と同じ区間に含まれる中で最も右の縦辺へと移動していく
 - 縦辺: 水平でない辺
 - 選ばれた縦辺を全て含むパス P を取ることができ、P は条件を満たすことが分かる



解法(判定パートの証明イメージ2)

- 「条件を満たすパスPが存在」ならば「木Tが描画可能」
 - パスPの頂点を上段に順番に並べる(P_1, P_2, \dots)
 - パスPを取り除いてできるパス成分のうち、 P_i に繋がっているものを下段にべったり置く
 - $i=1, 2, \dots$ の順に配置すれば描画可能

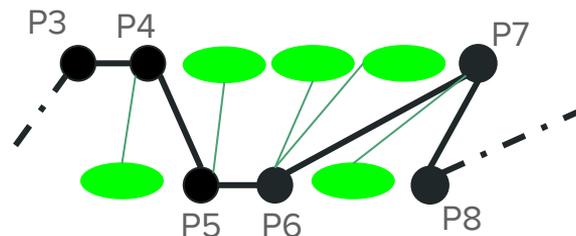


解法(最適化パート概略)

1. 判定パートの条件を満たすパス(以降「メインパス」)を取る
 - メインパスは一意でなく、テキストにとると WAになる(後述)
 - 最小のメインパスをとると良い
 - メインパスは、葉から削ったり、度数 3以上の頂点でいい感じの直径を取ると得られる
2. メインパスの頂点 P_1, P_2, \dots, P_L を左から順にgridの上下に配置していくDP
 - P_i に繋がる、メインパス以外のパス成分(以降「サブパス」)は、**ほぼ**全て対岸に並べる
 - 例外は後述
 - $dp[i][j][k][l] =$ 「メインパス $P_1 \sim P_i$ を配置, P_i の上下が j , P_{i-1} の上下が k , 上段に置いた頂点数が l 」が可能かどうか(false/true)

だいたい部分問題のようなDPになる
bitsetを使用することで計算量は $O(N^2/w)$

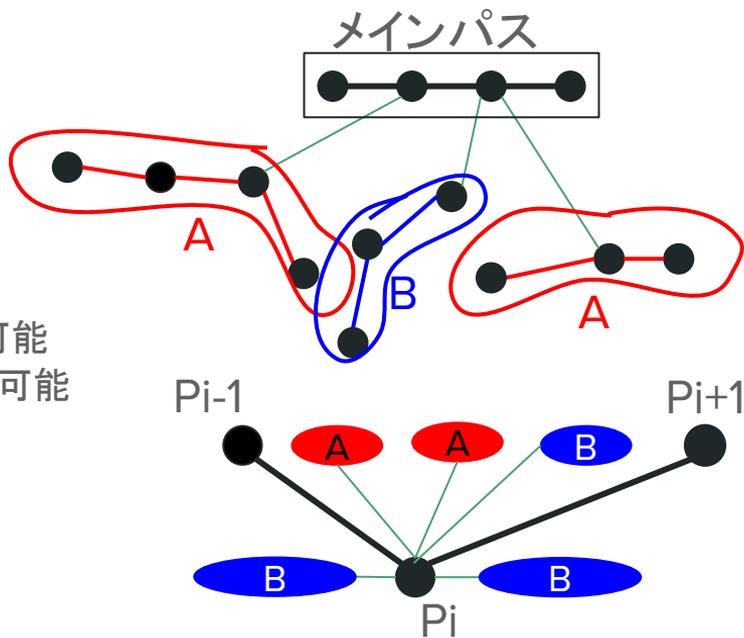
細かいケースに要注意!



解法(DP遷移の要注意点1)

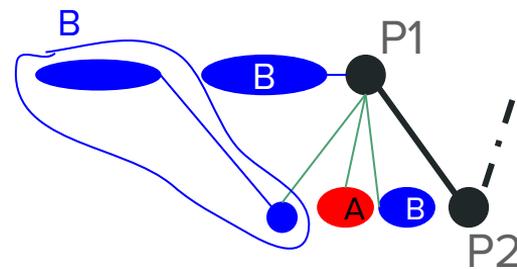
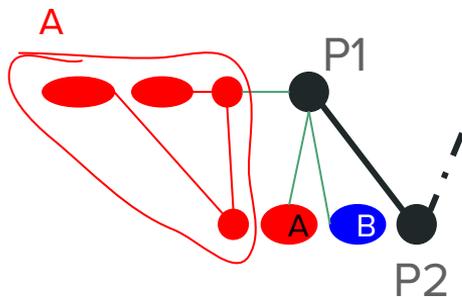
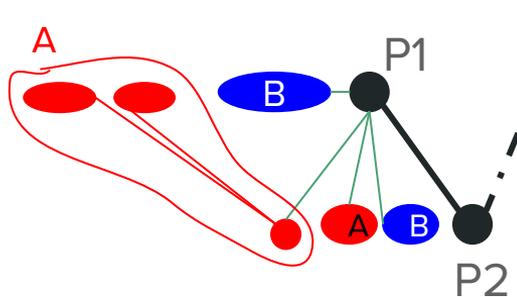
- メインパスに接続するサブパスを2タイプに分類
 - **タイプA**: パスの途中でくっついている
 - **タイプB**: パスの端っこでくっついている
- **タイプB**は P_i の対岸ではなく横に繋がられる
 - タイプAは不可(P_1 など端っこは例外...)
 - $P_i \rightarrow P_{i+1}$ を縦向きにすれば、 P_i の真右にBを配置可能
 - さらに $P_{i-1} \rightarrow P_i$ が縦向きの場合、 P_i の真左にも配置可能

DPで「k: P_{i-1} の上下」をキーを持ったのはこの遷移をケアするため



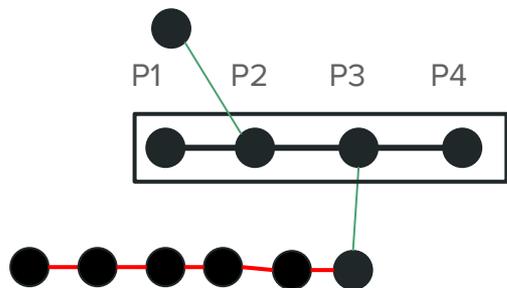
解法(DP遷移の要注意点2)

- メインパスの端っこ(P1の左, PLの右)は特殊
 - パスの折りたたみがかなり自由ができる
 - P1の左側同じ行にMax K個置けるなら、0~K個置くパターンが全て可能
 - 折りたたみ以外にも、以下のようなケースに要注意
 - P1の左側にサブパスを2つ置ける(Aを2つは無理)
 - L=1の場合はP1の両側でこの端ケースが発生するのでもっと要注意

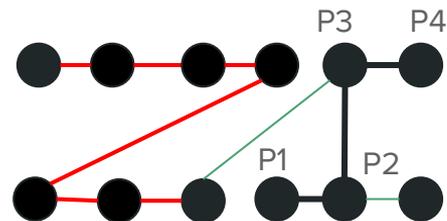


解法(メインパス取り方の要注意点)

- 最小以外のメインパス取ってDPするとダメなケース例
 - (解説のDPだと)長いサブパスはメインパス端っこにつながないといけない



枠内をメインパスに取ると最適解が得られない



最適な配置例

ジャッジ解

- mtsd (C++): 280 lines, 8201 B
- pachicobue (C++): 311 lines, 10643 B

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 0 + 0 / 2
- First Acceptance
 - N/A