ACM-ICPC Japan Alumni Group
Spring Contest 2014

B : Cube Coloring

原案：田中
解答：田中・井上・保坂・森
解説：田中

問題概要

(0,0,0)～(X-1,Y-1,Z-1) の範囲にあるX*Y*Z個の1辺1のキューブを考え、これらのキューブのうち一つを中心と定める。

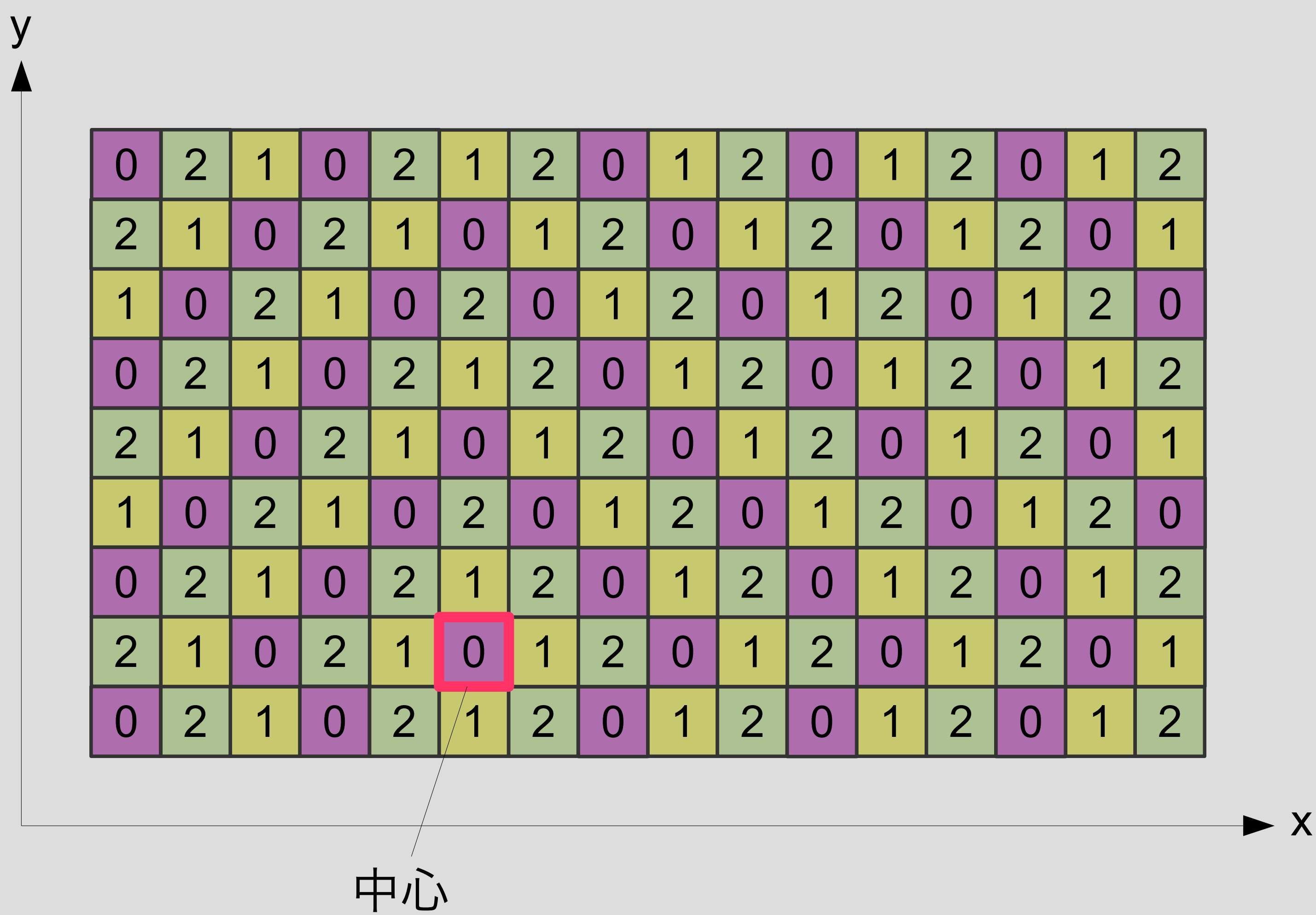
中心からのマンハッタン距離 ≡ i(mod N)

となるキューブの数を、各iについて求めよ。

$1 \leqq X,Y,Z \leqq 10^6$
$1 \leqq N \leqq 10^3$

解法

3次元は難しいのでまず2次元で考えましょう



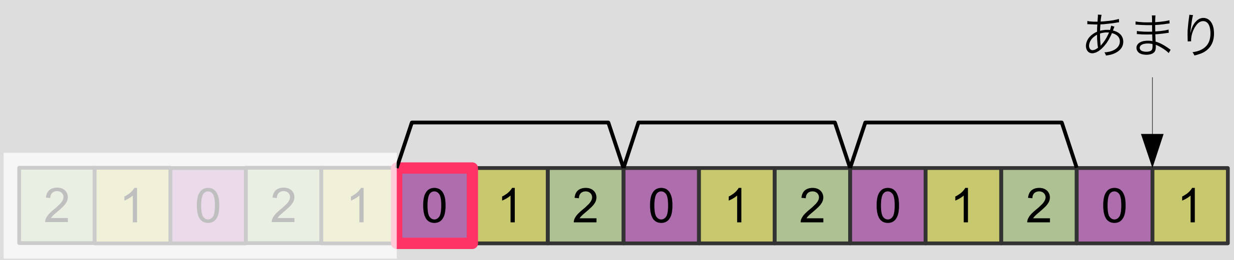
解法

2次元でも難しいので1次元からいきましょう

解法

連続したN個のキューブには、それぞれの色が1回ずつ現れる

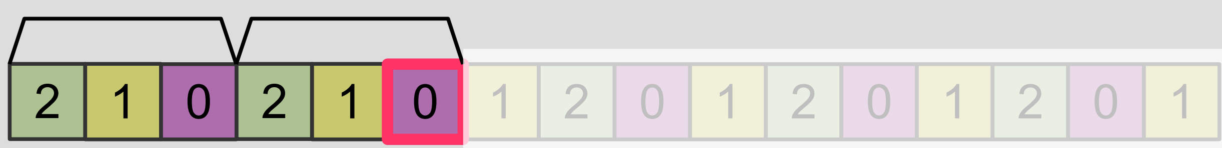
→Nで割った余りの部分のみ別途数えればよい



解法

逆側も同じ。

中心だけ2重に数えているのでその分あとで引く必要があります

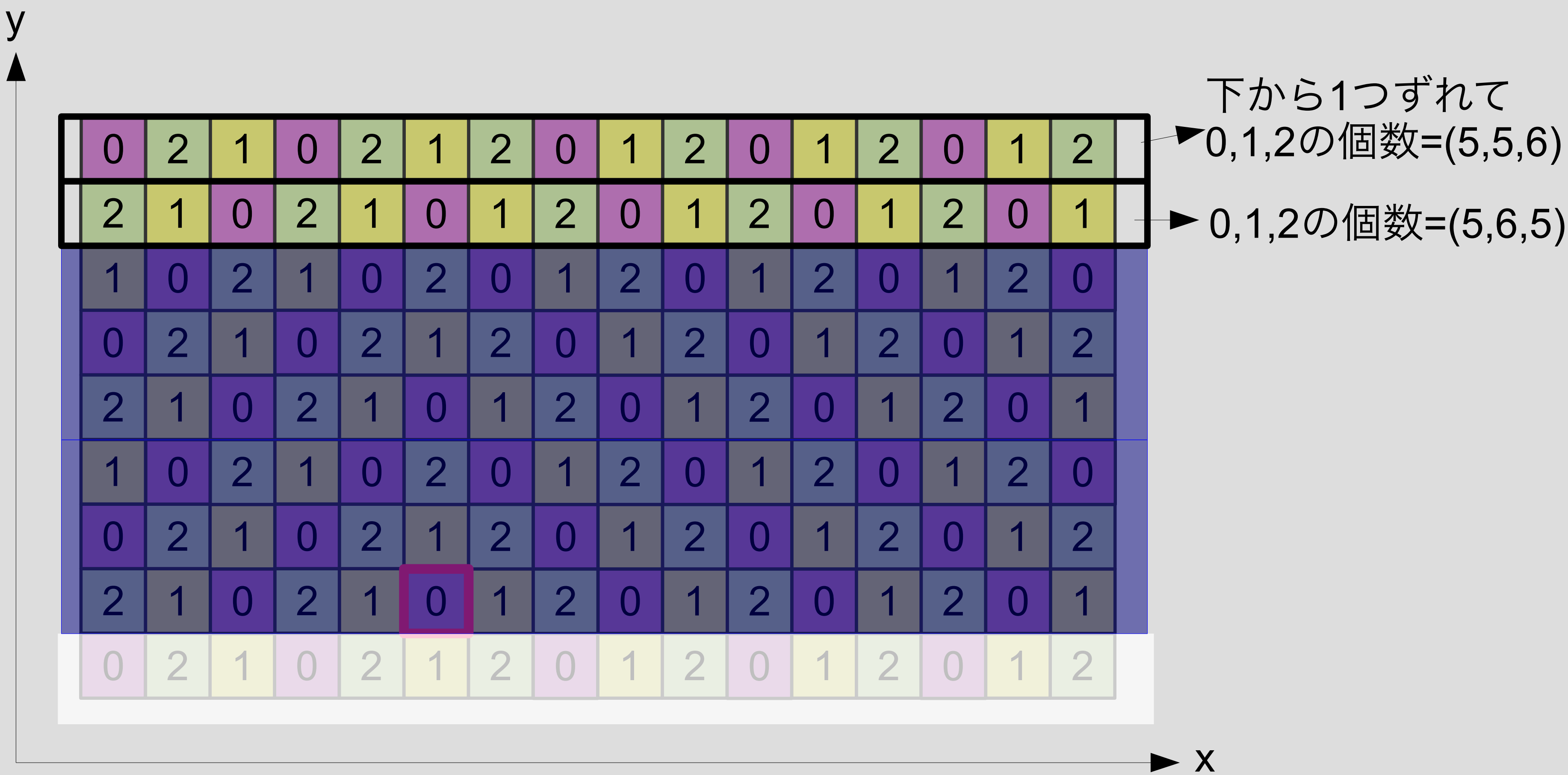


解法

2次元でも同じように中心が属する行から始まるN行分を考えると、それら N*X 個のキューブには各色がX個ずつ含まれる

解法

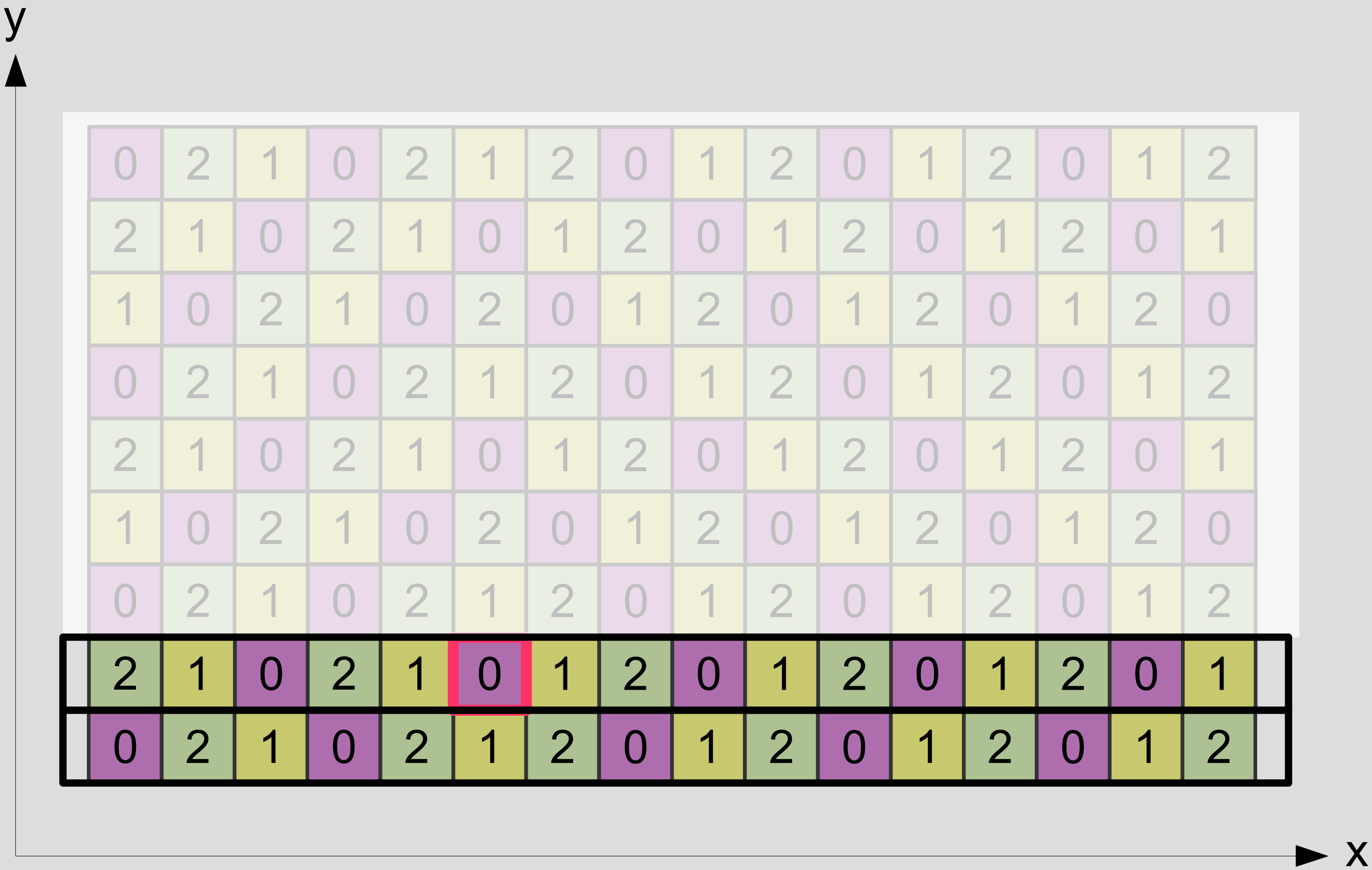
余りの部分の行たちについてまともに数えると O(NX)だが、一番下の行で各色が何個あるかを数えておくと、まとめて扱えO(N^2)になる



解法

下半分についても同様。

中心点が含まれる行について2重に数えているので後で引く必要がある



解法

3次元になっても同様にできる。

中心点を含む層からN層分の N*X*Y 個のキューブの中には各色が X*Y 個ずつ含まれるので、上下それぞれNで割った余りの層だけ数えれば良い。

一番下の層に各色が何個あるかを数えておく（これは2次元版でやった）と、余りの層について数えるのは $O(N^2)$ ででき、全体も $O(N^2)$ になる

別解（その1）

- 簡単のため2次元について記載します。
  中心点を含んでx軸に平行な軸上にあるキューブたちの中で各色に何個あるかが配列A[]に、同様にy軸についてB[]に入っているとします。
  求めたいものを配列C[]とします。よく考えると、Cは次の畳み込みによって得られるとわかります。

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}(C[(i+j) \bmod N] = C[(i+j) \bmod N] + A[i] * B[j])$$

  この畳み込みをFFTを使って行うと、 O(N logN)でできます。

別解（その2,3）

- “中心からの距離が1,2,3,...となるキューブが何個あるか” をそれぞれ O(1) で直接求めることもでき、全体で O(X+Y+Z+N) になります。
ですが、この方法だと多数の場合分けが発生しうるので、実装の複雑化を避けるには書き始める前に良く方針を整理する必要があります。
- そのほか、累積和DPをうまく使って O(N) でできる方法もあります。

統計情報

Submit：26チーム

Accept：24チーム

First Accept：anta (29:20)