C: Rebound Permutations

原案・解説：not
データセット：climpet
問題文：darsein
解答：

問題概要

あとで書く

解法（重複なし）

N = 4, a = [1, 2, 3, 4] の場合を観察する。

Rebound Permutation **でない** permutation は

[2, 3, 4, 1] [2, 4, 3, 1] [3, 2, 4, 1] [3, 4, 2, 1] [4, 3, 2, 1]

[1, 3, 4, 2] [1, 4, 3, 2]

[1, 2, 4, 3] [2, 1, 4, 3]

[1, 2, 3, 4] [1, 3, 2, 4] [2, 1, 3, 4] [2, 3, 1, 4] [3, 2, 1, 4]

最後の要素に着目して分割できることがわかる。

解法（重複なし）

N = 4, a = [1, 2, 3, 4] の場合を観察する。

Rebound Permutation **でない** permutation は

[2, 3, 4, 1] [2, 4, 3, 1] [3, 2, 4, 1] [3, 4, 2, 1] [4, 3, 2, 1]

[1, 3, 4, 2] [1, 4, 3, 2]

[1, 2, 4, 3] [2, 1, 4, 3]

[1, 2, 3, 4] [1, 3, 2, 4] [2, 1, 3, 4] [2, 3, 1, 4] [3, 2, 1, 4]

分割したそれぞれも Rebound Permutation でないことがわかる。

解法（重複なし）

あとで書く

TODO: if and only if であることを示す

解法（重複なし）

Rebound Permutation でない permutation の個数は

$$C(N+1) = C(0)C(N) + C(1)C(N-1) + C(2)C(N-2) + \dots + C(N)C(0)$$

という漸化式を満たす。

これはカタラン数の漸化式と同じである。

Rebound Permutation の個数は N! - C(N) となる。

解法(重複あり)

N = 5, a = [1, 2, 3, 3, 4] の場合を観察する。

Rebound Permutation **でない** permutation は

[2, 3, 3, 4, 1] [2, 3, 4, 3, 1] [2, 4, 3, 3, 1] [3, 2, 3, 4, 1] [3, 2, 4, 3, 1] [3, 3, 2, 4, 1] [3, 3, 4, 2, 1] [3, 4, 3, 2, 1] [4, 3, 3, 2, 1]
[1, 3, 3, 4, 2] [1, 3, 4, 3, 2] [1, 4, 3, 3, 2]
[1, 2, 3, 4, 3] [1, 2, 4, 3, 3] [2, 1, 3, 4, 3] [2, 1, 4, 3, 3]
[1, 3, 2, 4, 3] [2, 3, 1, 4, 3] [3, 2, 1, 4, 3]
[1, 2, 3, 3, 4] [1, 3, 2, 3, 4] [1, 3, 3, 2, 4] [2, 1, 3, 3, 4] [2, 3, 1, 3, 4] [2, 3, 3, 1, 4] [3, 2, 1, 3, 4] [3, 2, 3, 1, 4] [3, 3, 2, 1, 4]

最後の要素に着目して分割できることがわかる。

最後が 3 の場合のみ分割が 2 通り

解法（重複あり）

N = 5, a = [1, 2, 3, 3, 4] の場合を観察する。

Rebound Permutation **でない** permutation は

[2, 3, 3, 4, 1] [2, 3, 4, 3, 1] [2, 4, 3, 3, 1] [3, 2, 3, 4, 1] [3, 2, 4, 3, 1] [3, 3, 2, 4, 1] [3, 3, 4, 2, 1] [3, 4, 3, 2, 1] [4, 3, 3, 2, 1]
[1, 3, 3, 4, 2] [1, 3, 4, 3, 2] [1, 4, 3, 3, 2]
[1, 2, 3, 4, 3] [1, 2, 4, 3, 3] [2, 1, 3, 4, 3] [2, 1, 4, 3, 3]
[1, 3, 2, 4, 3] [2, 3, 1, 4, 3] [3, 2, 1, 4, 3] ⬅️ **左側の分割の最後の要素が3 にならない**
[1, 2, 3, 3, 4] [1, 3, 2, 3, 4] [1, 3, 3, 2, 4] [2, 1, 3, 3, 4] [2, 3, 1, 3, 4] [2, 3, 3, 1, 4] [3, 2, 1, 3, 4] [3, 2, 3, 1, 4] [3, 3, 2, 1, 4]

次のような DP を考える

DP1[i, j] := a[i] … a[j] の permutation で rebound でない個数
DP2[i, j] := a[i] … a[j] の permutation で rebound でなく最大要素が右端でない個数

解法（重複あり）

a[i], ..., a[j] の中から a[k] を選んで右端に移動させるような遷移を考えると

$$DP1[i, j] = \Sigma_K (a[k-1] \neq a[k] \ ?\ DP1[i, k-1] : DP2[i, k-1]) * DP1[k + 1, j]$$

$$DP2[i, j] = \Sigma_K (a[k] = a[j] \ ?\ 0 : a[k-1] \neq a[k] \ ?\ DP1[i, k-1] : DP2[i, k-1]) * DP1[k + 1, j]$$

という漸化式が得られる。

これを j-i の小さい順に計算することで $O(N^3)$ で答えを求められる。

統計情報

あとで書く