

ICPC模擬国内予選2020

D: そこそこバランスのとれた括弧列

原案: climpet

問題文: not

データセット: climpet

解答: climpet, not, cos, hos, not, riantkb, smiken, tsutaj

解説: climpet

問題概要

- 「そこそこバランスのとれた括弧列」(以下、そバ列)、を、次のように定義する。
 - 空文字列はそバ列
 - 2つの空でないそバ括弧列を連結したものはそバ列
 - そバ括弧列の左に '(' を1個または2個、右に ')' を1個または2個加えたものはそバ列
- 括弧列 S が与えられる。 S に '(' や ')' を追加してそバ列にしたい。最低何文字追加する必要があるか。
- 制約: $|S| \leq 200,000$

まずはこの問題を考えてみよう

括弧列 S が与えられる。 S に括弧を追加して、普通の定義で「バランスした括弧列」にしたい。最低何文字追加する必要があるか。

- S 中の各括弧について、 '(' に重み 1 を、 ')' に重み -1 を割り当ててみる。括弧列がバランスしているための必要十分条件は、次の 2 つを満たすことである。
 - A. 全体の重みの総和が 0
 - B. 前からの重みの累積和が負にならない
- ここで、括弧を追加する場合、 '(' は先頭に、 ')' は末尾に追加するとしてよい。
 - 理由: 条件Aを考えると、括弧をどこに追加しても重みの総和への影響は同じ。条件Bを考えると、前からの累積和は「早く上げて遅く下げる」のが得。

まずはこの問題を考えてみよう

括弧列 S が与えられる。 S に括弧を追加して、普通の定義で「バランスした括弧列」にしたい。最低何文字追加する必要があるか。

- したがって、この問題は次のように線形時間で解くことができる。
 1. '(' に重み 1 を、')' に重み -1 を割り当てる。
 2. 前からの重みの累積和の最小値から、追加しなければならない '(' の数を求める。
 3. 全体の重みの総和と、2 で追加した '(' の数から、追加しなければならない ')' の数を求める。

そこそこバランスのとれた括弧列とは？

- 元の問題では、“()” の他に “(()” や “())” など、そこそこバランスしているとみなされる。
 - “(())” もあるが、これは “()” を “()” で囲んだものとみなせるので、特別扱いしなくてよい
- これらのいずれについても重みの総和を 0 にできれば、先程の問題と同じように解けそうである。
- そこで、括弧の重みを、以下のように可変としてみる。
 - 基本的には ‘(’ は 1、’)’ は -1。
 - ただし、連続する 2 つの ‘(’ からなる組を作り、それぞれの重みを $\frac{1}{2}$ にできる。
 - 同じく、連続する 2 つの ‘)’ からなる組を作り、それぞれの重みを $-\frac{1}{2}$ にできる。
 - ただし、1 つの括弧が複数の組に属してはならない。
- 例えば、“(())” は括弧の重みをそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1 とすれば、総和を 0 にできる。

解法(1/2): 追加する '(' の数

- まずは、 S をそバ列にするために最低限追加しなければならない '(' の数 L を求める。
 - なお、追加する位置は先頭でよい。
- このためには、重みの累積和をできるだけ大きくすればよい。
- すなわち、 '(' の重みはとりあえず 1 としておき、 ')' の重みは可能な限り $-1/2$ とする。
- この重みの先頭からの累積和の最小値から、 L が求められる。
- また、 '(' を $L+1$ 個以上追加するのは無駄である。すなわち、追加するのはちょうど L 個で十分である。

解法(2/2): 追加する ')' の数

- 次に、最低限追加しなければならない ')' の数 R を求める。
 - これは、先程の '(' の数と同じことを後ろから行えばよい。
 - なお、先程と同様、追加する位置は末尾でよい。

- 実際に '(' を先頭に L 個、')' を末尾に R 個に追加してできる括弧列について、重みをうまく割り当てることでそバ列の要件を満たすことを示せる。すなわち $L+R$ が答え。
 - 証明は各自で考えてみてください。

解法まとめ

1. 最低限追加する必要のある '(' の数を求める。
2. 最低限追加する必要のある ')' の数を求める。
3. それらの和が答え。

計算量は全体で $O(|S|)$ 時間。

他にも様々な方針があります。

- 入力が小さければ、区間DPによる $O(|S|^3)$ 時間の方針もあります。こちらも考えてみてください。

ジャッジ解

- climpet (C++): 76行, 1315 bytes
- cos (C++): 59行, 1425 bytes
- hos (C++): 46行, 867 bytes
- not (C++): 46行, 709 bytes
- riantkb (C++): 56行, 1342 bytes
- smiken (C++): 95行, 1207 bytes
- tsutaj (C++): 75行, 1829 bytes

統計情報

- AC / trying teams
 - 55 / 109
- First acceptance
 - 非現役込み: onion (23:29)
 - 現役のみ: onion (23:29)