

D: Many-hued Tree

原案 : mtsd

問題文 : smiken

データセット : mtsd

解答 : hos, kotatsugame, mtsd, smiken

解説 : mtsd

問題概要

- N 頂点の木が与えられる
- 長さ N の順列 P で、以下の条件を満たすものはいくつあるか
mod 998,244,353 で答えよ
 - 頂点 i に色 P_i を塗ったとき、以下の操作を繰り返して1頂点にできる
 - 操作: 塗られている色番号の差の絶対値が1の隣接する頂点 A, B をマージして、どちらか一方の色にする
- 制約
 - $N \leq 2,000$

解法(必要十分条件パート)

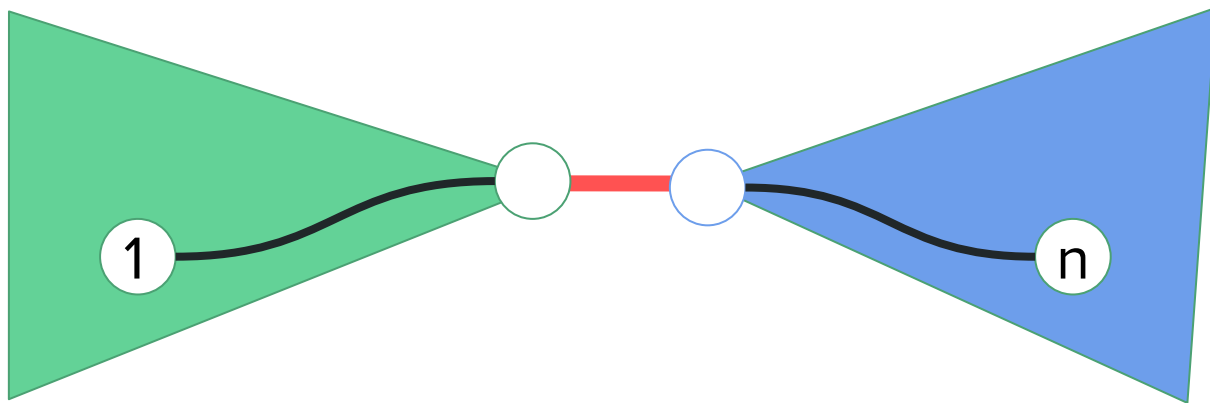
- 「操作を繰り返して1頂点にできる」という条件は以下の条件と同値
- 色1で塗られている頂点から昇順にマージできる最大の色番号を X 、色 n で塗られている頂点から降順にマージできる最小の色番号を Y としたときに、 $X+1 \geq Y$ となる
 - つまり、「1 → 2 → ... とマージ」と「 $n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots$ とマージ」の2種類を組み合わせると上手いくことが必要十分条件
- (証明の概略)
 - 残っている色が区間 $[L, R]$ であるとき、 $L < x, x+1 < R$ であるようなペア $(x, x+1)$ をマージしてしまると、色の区間が分かれるので全てをマージすることは不可能になる
 - よって、必ず $(L, L+1)$ か $(R-1, R)$ のどちらかがマージされる

解法(数え上げパート 1)

- 色 1 で塗られている頂点から昇順に**全ての頂点をマージ**できる順列の総数は $O(n)$ で計算可能
 - 色 1 で塗られている頂点が固定されている場合:
 - 条件を満たす順列は「色 1 で塗られている頂点を根とした根つき木のトポロジカル順序」と対応する
 - 木 DP により $O(n)$ で計算可能
 - 実は $n! / (\text{各頂点の部分木サイズの総積})$ に等しい(※この事実を使わなくても解ける)
 - 色 1 で塗られている頂点が固定されていない場合:
 - 各頂点に対して、色 1 で塗られている場合の順列の総数を計算したい
 - 全方位木 DP により $O(n)$ で計算可能

解法(数え上げパート 2)

- 色 1 側のマージと色 n 側のマージを分ける辺を固定する
 - 辺を固定すると、それぞれの側の色の塗り方は $O(n)$ で計算可能
 - 全ての辺に対して行うと全体で $O(n^2)$
 - そのまま総和を取ると重複して数え上げてしまう(後述)

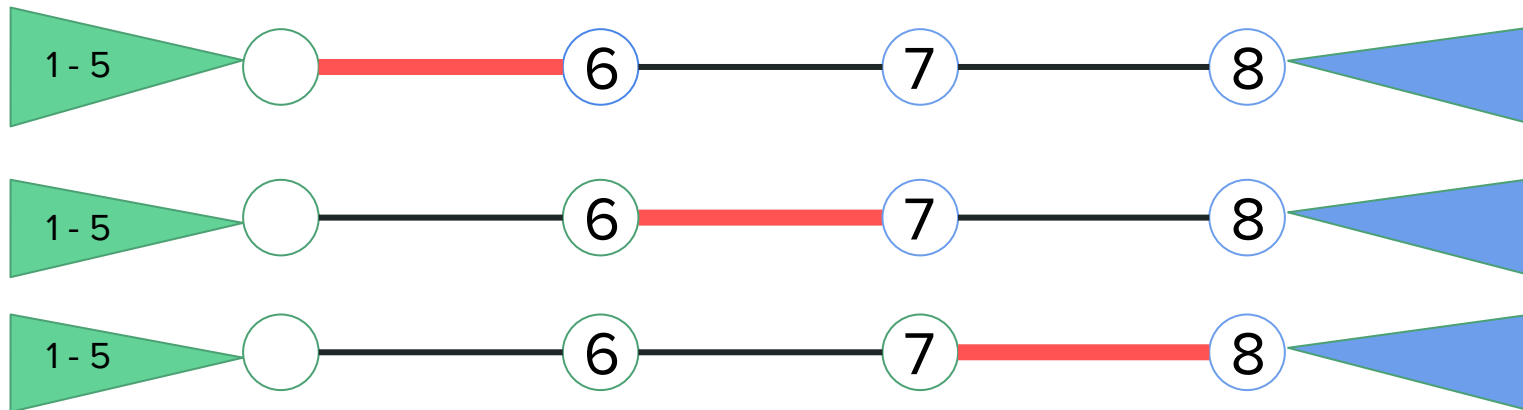


緑色のゾーンが色 1 側, 青色のゾーンが色 n 側

解法(数え上げパート 3)

- 同じ書き込み方でも「色 1 側のマージと色 n 側のマージを分ける辺」が複数通り考えられることがあり、重複を引かなければならない
 - そのような辺集合はパスを成し、かつ、そのようなパスの途中には分岐がない
 - 色 1 側のサイズが k で、マージしてできる頂点が、色 $k+1, k+2, \dots, k+m$ というパスに接続していて $k+1, \dots, k+m$ が塗られている頂点の次数が 2

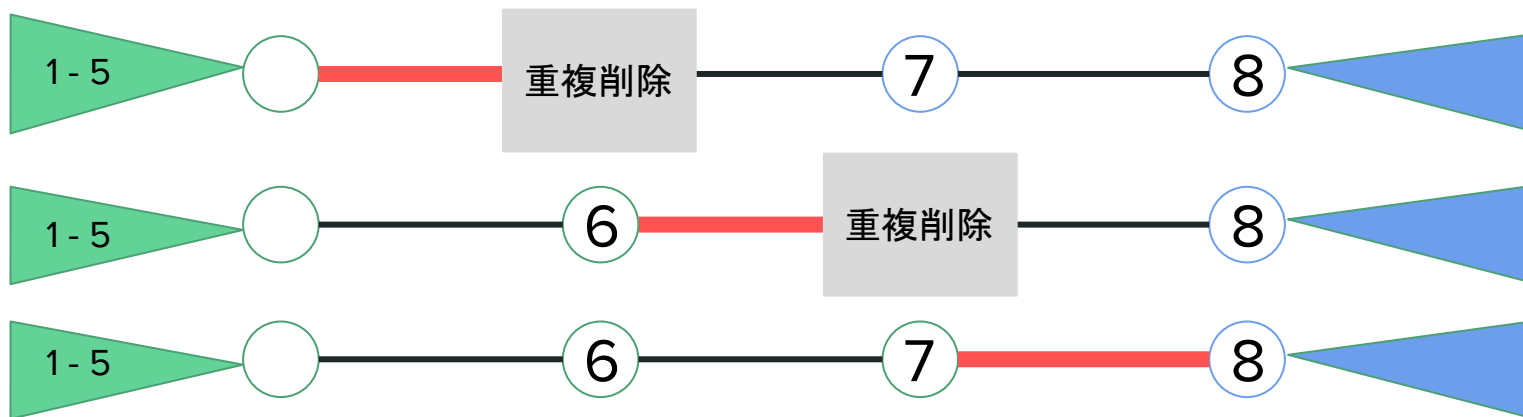
例



解法(数え上げパート 4)

- 次数 2 の各頂点に対して、「その頂点を取り除いて、片側を色 1 側、もう片側を色 n 側と場合の数」を引けば重複が取り除ける
 - 「色 1 から限界までマージしたパターンのみ」を数え上げると解釈できる

例



解法(数え上げパートまとめ)

- 色 1 側のマージと色 n 側のマージを分ける辺を固定
- 分けた各側について独立に、全方位木 DP で順列の総数を計算
- 重複分を引くために、次数 2 の頂点に対して、「その頂点を取り除いて、片側を色 1 側、もう片側を色 n 側とした場合の数」を全方位木 DP で計算する
- 計算量: $O(n^2)$

統計情報

- Acceptances
 - 0 + 1 teams
- First Acceptance
 - SPJ (292 min)