

Counting 1's

ICPC 模擬地区予選 2012
Problem: F

原案: 八森・酒井
解答: 酒井・宮村
スライド: 宮村

問題概要

- 区間 $[A, B]$ に含まれる i ビット目が1である整数の個数がそれぞれ与えられる($k[i]$)ので、 A , B を復元する問題。
- 解が存在しない場合や、一意に定まらない場合は指摘する。

解法(アウトライン)

- 1. 区間 $[A, B]$ の幅($=B-A+1$)を決める。
- 2. A, B の値を必要条件から絞る。
- 3. 区間 $[A, B]$ が十分条件を満たすか調べる。

区間の幅を決め打ちする

- $k[1]$ は $[A,B]$ に存在する奇数の個数と等しい。
- したがって、 $[A,B]$ の幅($\text{width} := B - A + 1$)は
 1. $2 * k[1] - 1$
 2. $2 * k[1]$
 3. $2 * k[1] + 1$のいずれかになる。
- 3つしかないので全部調べてみる。

区間[A,B]の候補を求める

- 具体例で考えてみよう。

$k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$

width = 11

のときA, Bはどのような値でなくてはならないか?

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11
- 上のビットから確定させていく。
- まず $k[8]=0$ より次のように確定。

A = 0b 0????????

B = 0b 0????????

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11

- 続いて $k[7]=11=\text{width}$ なので次も確定。

A = 0b 01??????

B = 0b 01??????

- 同様にやって上4桁は確定。

A = 0b 0101????

B = 0b 0101????

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11
- $k[4]=3 \neq 0$ or widthなのでAとBの4ビット目は異なる。 $A \leq B$ なので次のように確定。

A = 0b 01010???

B = 0b 01011???

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11
- $[A, B] = [0b\ 01010???,\ 0b\ 01011???]$
= $[0b\ 01010???,\ 0b\ 01010111]$
 $\cup [0b\ 01011000,\ 0b\ 01011???]$
- この二つの区間の内
 前者では常に4番目のビットは0
 後者では常に4番目のビットは1

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11
- [A,B]の中で4ビット目が立っている数は
|[0b 0101 1000, B]|個で、これが $k[4]=3$ に
等しい。
- つまり
$$B - 0b\ 01011000 + 1 = k[4]$$
- これを解いて $B = 90$
また、 $A = B - \text{width} + 1 = 80$

区間[A,B]の候補を求める

- $k[1..8]=\{5,5,4,3,11,0,11,0\}$, width=11
- $A = 80, B = 90$ が得られたけど、まだ本当に正しいかどうかは分からない。
- 実際、 A, B を決めるのに $k[1], k[2], k[3]$ の値はまったく見ていなかった。

区間[A,B]が正しいかチェックする

- $1 \leq A \leq B \leq 10^{18}$ が成り立っているか確認。
- 各 i ($1 \leq i \leq n$)について
 - $f(A, B, i) = \{[A, B]$ に含まれる整数で、 i 番目のビットが立っているような数の個数}
 - としたとき $f(A, B, i) = k[i]$ が成り立つかどうか調べれば良い。
- $f(A, B, i) = f(0, B, i) - f(0, A-1, i)$ なので
 - $f(0, X, i)$ を効率的に求められればよい。

[0, X]のi番目のビットが立っている 数の個数を求める

- 具体例で考えてみよう。

$X = 0b\ 0101\mathbf{1}010$, $i=4$ とする。

- [0, X]を3つの区間に分ける。具体的には
[0, $0b\ 0101\mathbf{0}000$],
[$0b\ 0101\mathbf{0}001$, $0b\ 0101\mathbf{0}111$],
[$0b\ 0101\mathbf{1}000$, $0b\ 0101\mathbf{1}010$]
の3つに分けて考える。

[0,X]のi番目のビットが立っている 個数を求める

- 1. [0, 0b 01010000]
に含まれる4ビット目が1な数の個数は?
- zを[0, 0b 01010000 - 1]に含まれる任意の整数とする。
- このとき、zの4ビット目をフリップした数は必ず [0, 0b 01010000 - 1]に含まれる。
- したがって、[0, 0b 01010000] に含まれる4ビット目が1な数の個数は
0b 01010000 のちょうど半分。

[0,X]のi番目のビットが立っている 個数を求める

- 2. [0b 01010001, 0b 01010111]
に含まれる4ビット目が1な数の個数は?
- 明らかに0個。

[0,X]のi番目のビットが立っている 個数を求める

- 3. [0b 01011000, 0b 01011010]
に含まれる4ビット目が1な数の個数は?
- この区間内では常に4ビット目が1。
- したがって区間の幅である

$$\begin{aligned} & 0b\ 01011010 - 0b\ 01011000 + 1 \\ &= 010 - 000 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

が答。

[0, X]のi番目のビットが立っている 個数を求める

- 今見た例ではXのi番目のビットが1である場合だったが、そうでない場合も同様に考える。
- いずれの場合も、さっきの例を一般化して考えると[0, X]に含まれるi番目のビットが立っている数の個数はビット演算などを用いて $O(1)$ で求めることが可能。

全体の計算量

- 幅の候補は3個しかない。
- $[A, B]$ の候補を絞る部分の計算量は $O(n)$ 。
- $[A, B]$ が正しいかどうか確かめる部分も $O(n)$ 。

- なので、全体の計算量は $O(n)$ 。
 $n = 64$ なので、テストケースが多くても十分間に合う。

解答例

- 酒井

C++ : 79行 1579byte

- 宮村

C: 28行 765byte

- 多少発想が要求される問題だけど、実装量は少ない。