



F: Polygon Guards

JAG 春コンテスト 2014

原案：保坂

解答：保坂・田中

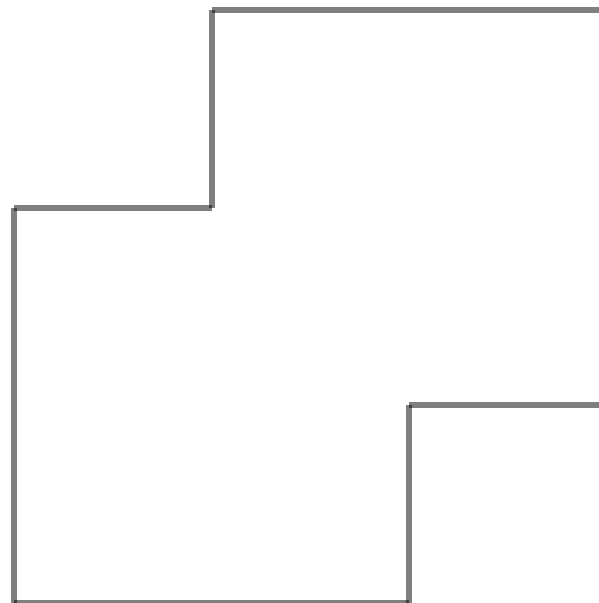
解説：保坂



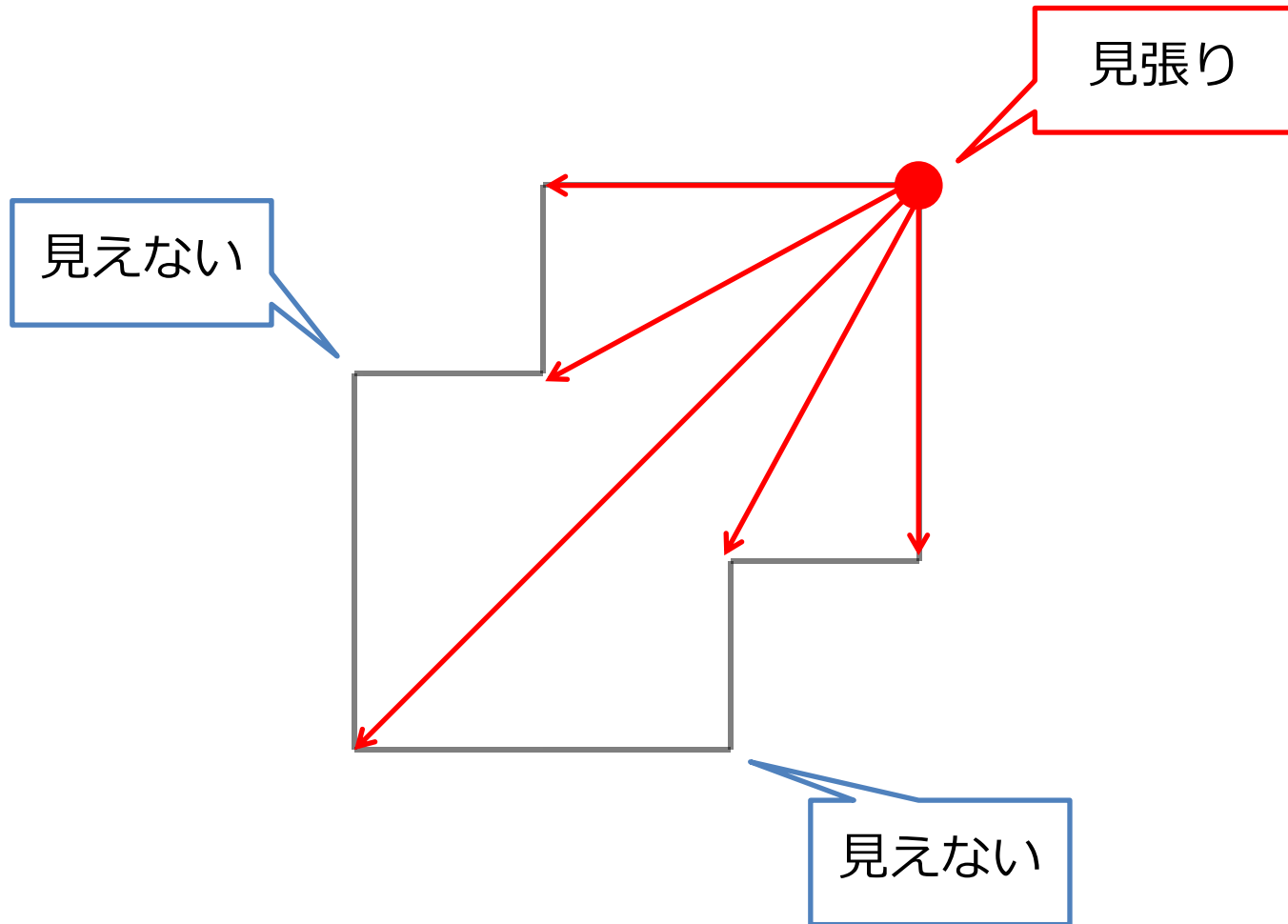
問題概要

- N 角形 ($4 \leq N < 40$) が与えられる
 - 凸とは限らない
 - 各辺は座標軸に平行
- 頂点のうちいくつかに見張りを置いて、すべての頂点を監視したい
 - 監視できる条件は、結ぶ線分の全体が N 角形の内部または周上に含まれていること
- 見張りは最小何人必要か？

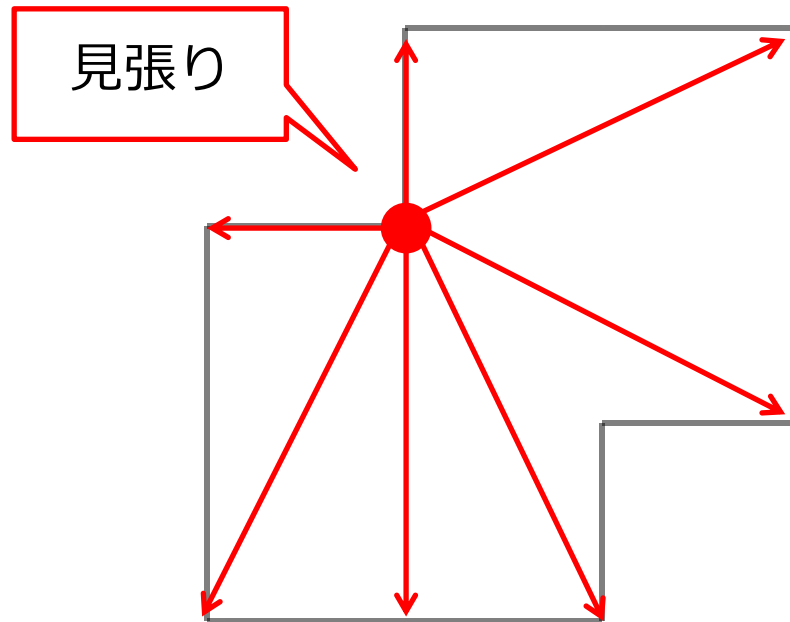
Sample Input 1



Sample Input 1



Sample Input 1



OK!

解法

- 幾何パート
 - 「頂点 A から頂点 B を監視できるか？」を各頂点の組に対して調べる
 - 線分が多角形の内部または周上に含まれているか
- グラフパート
 - 頂点を最小いくつ選べば見張れるか求める
 - 「最小支配集合」(minimum dominating set)

幾何パート

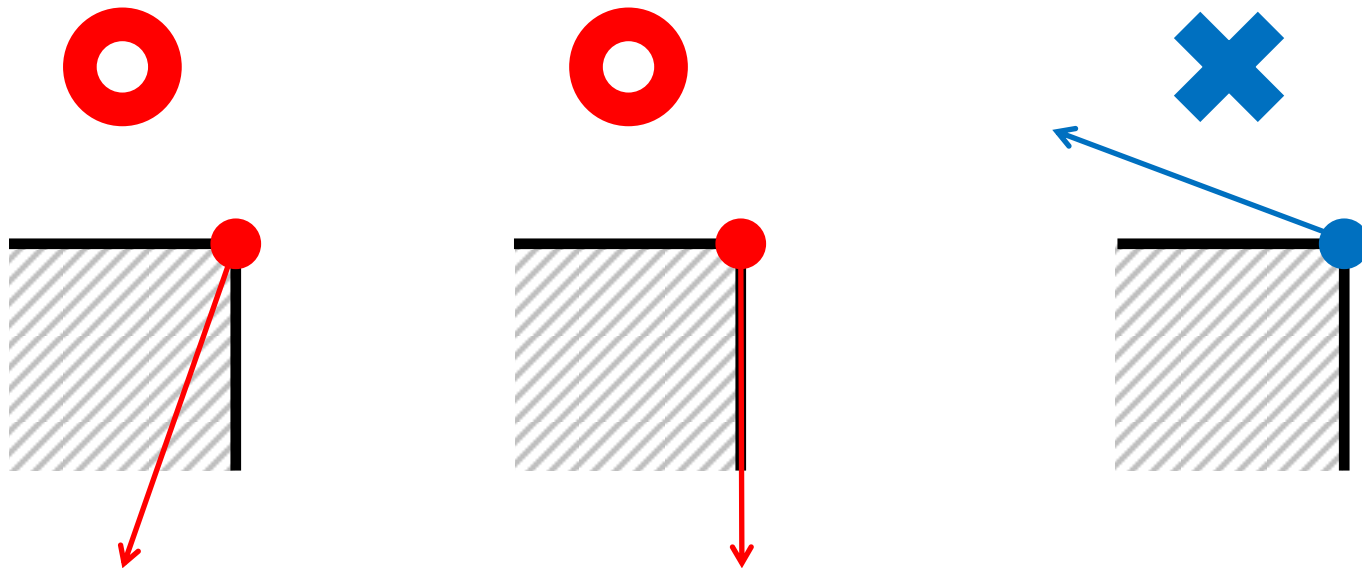
- がんばる
- 適宜ライブラリを頼りにしましょう
- 混乱せず書ける方針の 1 つを紹介します

幾何パート

- 線分が多角形の内部または周上にあるための条件
 1. 線分の端 (: 多角形の頂点) からちょっと進んだ部分が多角形の外部に出ない
 2. 途中で多角形の外部に出ない

幾何パート

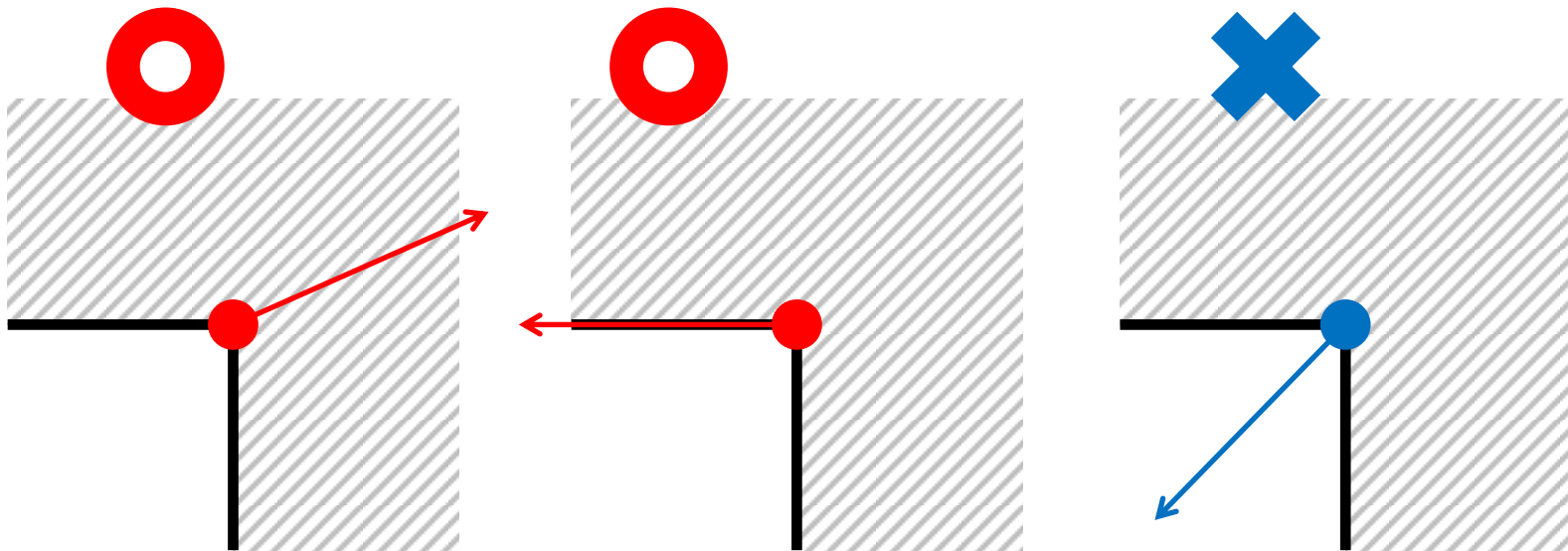
1. 線分の端（：多角形の頂点）からちょっと進んだ部分が多角形の外部に出ない
– 角の内部方向に進んでいるかどうか



(斜線の側が内部)

幾何パート

1. 線分の端（：多角形の頂点）からちょっと進んだ部分が多角形の外部に出ない
– 角の内部方向に進んでいるかどうか



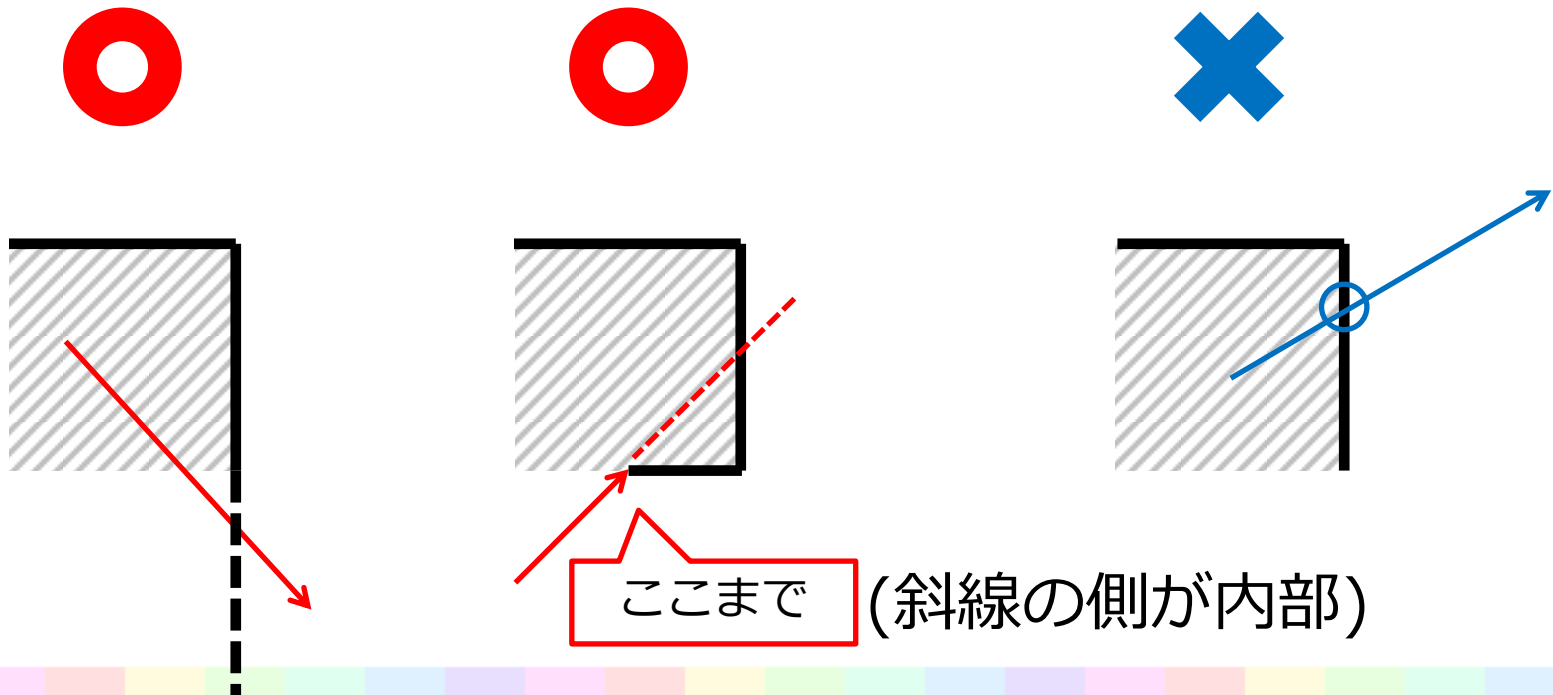
(斜線の側が内部)

幾何パート

2. 途中で多角形の外部に出ない

– 途中で**辺**を越えて外部に出ない

- 線分の交差判定 (端点以外で交わっていないか)

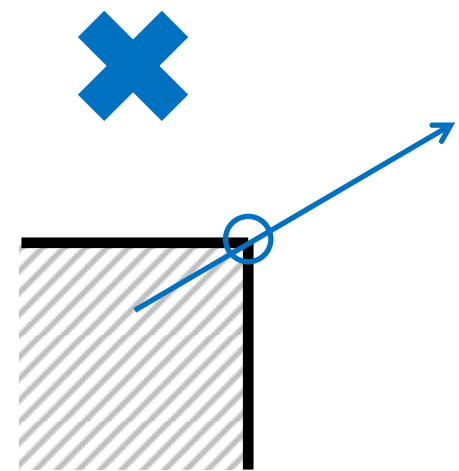
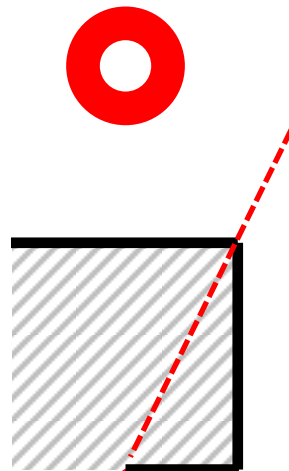
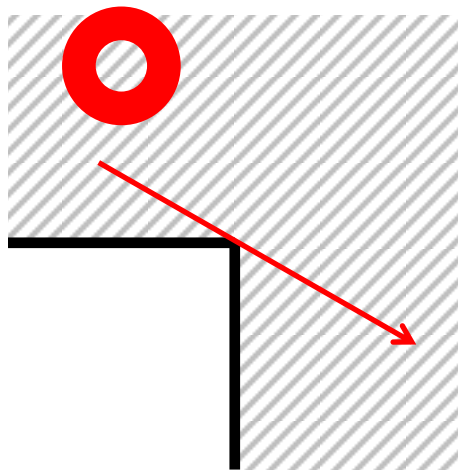


幾何パート

2. 途中で多角形の外部に出ない

– 途中で**頂点**を越えて外部に出ない

- 頂点が線分上か／双方向について角の内部判定



ここまで (斜線の側が内部)

最近流行の便利関数

- 原点を始点とするベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} について, \vec{c} が「 \vec{a} から \vec{b} へ反時計回りで回る角」の内部・辺上・外部のどこにあるか
– どの場合にどういう値になるか (場合分けでわかる) を考えて動作を理解しましょう

$$\text{sign}(\vec{a} \times \vec{c}) - \text{sign}(\vec{b} \times \vec{c}) - \text{sign}(\vec{a} \times \vec{b})$$

sign は負なら -1, 正なら +1, 0 なら 0

$\vec{a} = (x_a, y_a), \vec{b} = (x_b, y_b)$ に対して $\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - x_b y_a$

グラフパート

- 頂点の集合すべてについて, それらですべての頂点を見張れるか調べる?
 - 2^N 通り (遅い)
- 何かしらの工夫が必要

ポイント

- 答えは実はあまり大きくなならない
- 各辺が座標軸に平行な多角形に対し, 必要な見張りの人数は $[N/4]$ 以下 (Kahn, Klawe, Kleitman, 1980)
 - 証明は結構大変 (四角形分割できるのを示す)
 - 一般の多角形だと $[N/3]$ 以下 (三角形分割)

$[N/4]$ 人必要な例 →



工夫の例

- 8 頂点以下の集合をすべて調べる
 - 無理だったら答えは 9
 - ${}_{38}C_0 + {}_{38}C_1 + \dots + {}_{38}C_8 = 64,869,364$
 - 判定にビット演算を用いる, などうまくやれば間に合う
 - $N = 40$ (\rightarrow サイズ 9 まで) でもなんとか間に合うようにできます

工夫の例

- 反復深化深さ優先探索 (iterative deepening depth-first search) を用いる
 - 答えの上限を気にせず書ける

工夫の例

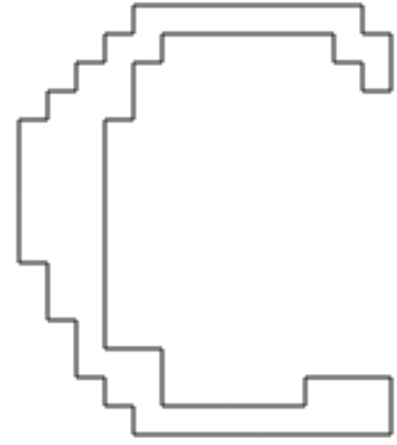
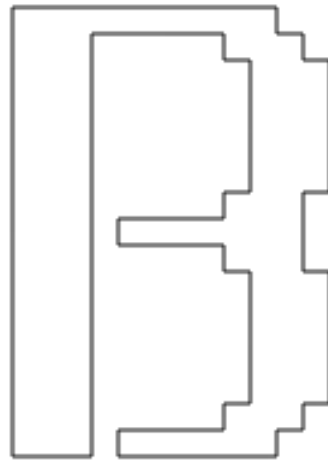
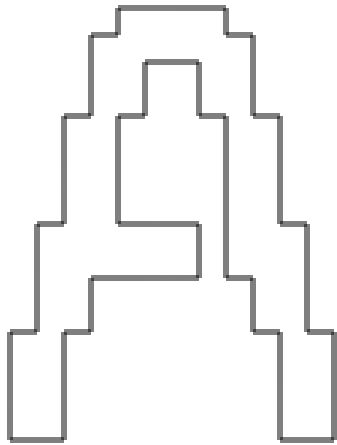
- 深さ優先探索 + 枝刈り
 - 今選んでいる頂点たちですべて見張れていたらバックトラック, だったり
 - 新たに頂点を選んでも見張れる頂点が増えないなら選ばない, だったり
 - 今まで見つかった答えのサイズ以上になったらバックトラック, だったり
 - 答えが小さいから有効

工夫の例

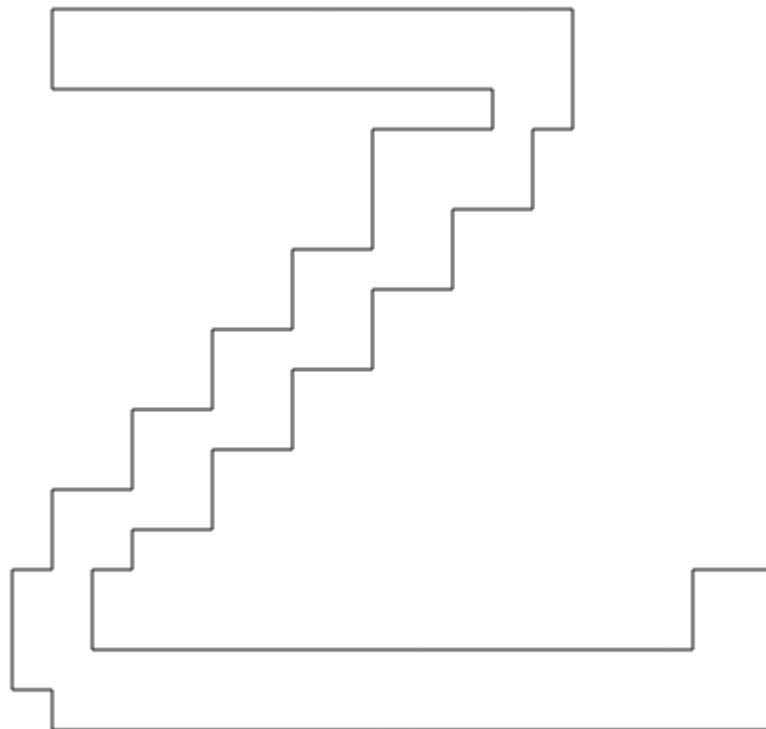
- 一般の最小支配集合問題 (NP 困難) に対する指数時間アルゴリズムを用いる
 - $O(1.4969^N)$ 時間とかあるらしいです
 - この問題で使うのはやや大げさかもしれませんが、ライブラリ化してあるなら十分あり

ジャッジデータ紹介

- この子たち 26 人でいろいろな誤答を捕らえてくれました



ジャッジデータ紹介



結果

- Accepted / Trying Teams / Submission
 - 10 / 11 / 36
- First Accepted
 - Operasan (in 海ほたる) (141:41)