# Problem G: Revenge of Minimum Cost Flow

原案:荒木,林崎

解答:山添,須藤

解説:須藤

#### 問題概要

- n(≦100)頂点の有向グラフが与えられる
- 頂点sから頂点tに流量f(≦200)のフローを流すときの 最小コストを求める
- 各枝は容量が無限
- ◆ 枝iに流量uを流すコストは、
  - ua<sub>i</sub> (u ≦ d<sub>i</sub> のとき)
  - d<sub>i</sub>a<sub>i</sub> + (u d<sub>i</sub>)b<sub>i</sub> (u > d<sub>i</sub> のとき)
- a<sub>i</sub> < b<sub>i</sub> となる枝は高々1個、
  それ以外の全ての枝は a<sub>i</sub> > b<sub>i</sub> をみたす。

### 解法(1/3)

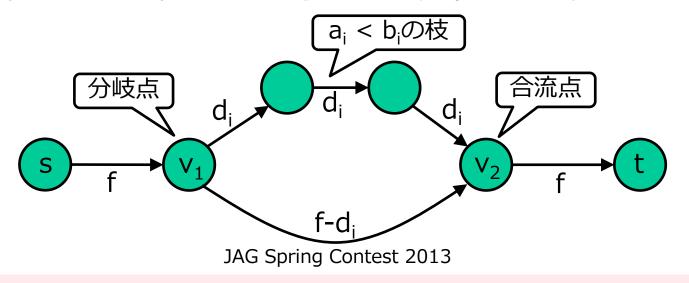
- すべての枝が a<sub>i</sub> > b<sub>i</sub> をみたすとき
  - 1つのパスに全フローを流すのが最適
  - 各枝の通行コストを容量fを流したときのコストとした グラフ上での最短路問題となる
- sからtへのパスを2本取り、それぞれについて u流すときのコストを  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$  とする。
  - 条件からc<sub>1</sub>もc<sub>2</sub>も上に凸な関数
  - $c_1(u)+c_2(f-u)$ も上に凸な関数
  - 区間0≤u≤fで、u=0 か u=f のどちらかで最小値を取る
  - 2本のパスに分かれたフローはコストを悪くせずにまとめられる
  - よって最適解はどれか1本のパスに全フローを流す場合のどれか JAG Spring Contest 2013 3



- - この枝を通るパスはコスト関数が上に凸でない
  - 「1つのパスに全フローを流す」が最適にならない場合が存在
- 最適解の1つを取って来たと考える
  - $a_i > b_i$  をみたす枝のみを通るパスのフローは コストを悪くせずにどこか1本のパスにまとめる事ができる
  - a<sub>i</sub> < b<sub>i</sub> をみたす枝を通るパスも1本のパスにまとめられる
  - よって  $\lceil a_i > b_i$  をみたす枝のみを通るパス」と  $\lceil a_i > b_i$  をみたす枝を通るパス」の2本を考えれば良い

## 解法(3/3)

- 2本のパスへのフローの配分
  - 「a<sub>i</sub> < b<sub>i</sub> となる枝を通るパス」にd<sub>i</sub>流す場合だけ考えれば良い
  - 合計コストは、0≤u≤d<sub>i</sub>、d<sub>i</sub>≤u≤f の各区間で考えると上に凸
  - よって、「2本のどちらかに全フロー流す」か、  $\lceil a_i < b_i \ \ \, となる枝を通るパスに \ \, d_i 流す」場合のどれかが最適$
- 2本のパスを経由する場合は、以下の形を試せば良い





- 計算量は全体でO(n³)
  - f、f- $d_i$ 、 $d_i$ 流したときのそれぞれについて、 ワーシャルフロイドで全点間最短路を出しておく( $O(n^3)$ )
  - $a_i < b_i$  となる枝がある場合は、2本のパスの分岐点・合流点を全通り試して、1本のパスに全フロー流す場合と比較( $O(n^2)$ )
- 制約上、2本のパスに流すフロー配分を全通り試しても ギリギリ間に合う (O(fn³)、C++調べ)
- こんなタイトルですが実は最短路問題でした

#### ジャッジ解

- 山添 63行(1,762B), C++
- 須藤 84行(2,549B), C++



- Submitチーム数:3
- Acceptチーム数:2
- 総Submit: 15
- First Accept: Komaki (2h52m)