Proportional Representation

JAG 春コンテスト 2014 問題 G

原案　野田
解答　保坂・楠本
解説　保坂

問題概要

ドント式 (D'Hondt method) の比例代表で選挙を行った．タイブレークはくじ引き．投票総数 N $(1 \le N \le 10^9)$, 政党数 M $(1 \le M \le 30\,000)$, 各政党の獲得議席数 S_i $(0 \le S_i \le 30\,000)$ が与えられたとき, 各政党の得票数としてありうる最小値と最大値を求める．状況が不可能ならそれを指摘．

解法

政党 i の得票数を x_i とすると, 満たされるべき条件は任意の i, j に対して $\dfrac{x_i}{S_i} \ge \dfrac{x_j}{S_j+1}$ であること ($\dfrac{x_i}{0}$ は ∞ とみなす)．これは, ある実数 r が存在して任意の i に対して $\dfrac{x_i}{S_i} \ge r \ge \dfrac{x_i}{S_i+1}$ であることと言い換えられる (つまり, r が当選のボーダーライン)．ここで r としては分母が S_i+1 のいずれかであるような有理数で存在することと同値.

まず, r を固定したときを考える．x_i は $rS_i \le x_i \le r(S_i+1)$ の範囲の整数を動ける．各 i についてこの範囲に整数が存在しなければならない $(*)$．この条件が成り立つとき, $\displaystyle\sum_j x_j = N$ のもとで x_i の動ける範囲は

$$\max\left\{\lceil rS_i \rceil, N - \sum_{j \ne i} \lfloor r(S_j+1) \rfloor\right\} \le x_i \le \min\left\{\lfloor r(S_i+1) \rfloor, N - \sum_{j \ne i} \lceil rS_j \rceil\right\} \tag{1}$$

である (この範囲は空かもしれないことに注意)．r に対してこれを各 i について求めるのは $O(M)$ 時間でできる．$f_i(r) = \lceil rS_i \rceil$, $g_i(r) = \lfloor r(S_i+1) \rfloor$, $F_i(r) = N - \displaystyle\sum_{j \ne i} \lceil rS_j \rceil$, $G_i(r) = N - \displaystyle\sum_{j \ne i} \lfloor r(S_j+1) \rfloor$ とおく．$f_i(r)$, $g_i(r)$ は r について広義単調増加, $F_i(r)$, $G_i(r)$ は r について広義単調減少である.

r を動かす．r と 1 との大小で場合分けする (おおよそ, 投票総数と議席数との大小関係に対応する).

(i) $r \ge 1$ のとき

$f_i(r) \le g_i(r)$ であるから, 条件 $(*)$ は常に成立する．さらに $F_i(r) \le G_i(r)$ であるから, (1) が空でないための条件は $f_i(r) \le F_i(r)$ かつ $G_i(r) \le g_i(r)$, すなわち

$$\sum_j \lceil rS_j \rceil \le N \le \sum_j \lfloor r(S_j+1) \rfloor \tag{2}$$

である (単調性よりこれは区間である)．よって, $r \ge 1$ であるときに x_i がとりうる最小値は $r \ge 1$ かつ (2) を満たす範囲の r に対する $\max\{f_i(r), G_i(r)\}$ の最小値である．それは単調性より, $f_i(r)$ と $G_i(r)$ の大小関係が変化する箇所のみ考えればよい．すなわち,

- ある r で $f_i(r) = G_i(r)$ なら, その値
- $f_i(r) = G_i(r)$ なる r が存在しなければ,
    - ○ $f_i(r) < G_i(r)$ なる最大の r に対する $G_i(r)$
    - ○ $f_i(r) > G_i(r)$ なる最小の r に対する $f_i(r)$

  のうち小さい方

が $\max\{f_i(r), G_i(r)\}$ の最小値である.

ここで, 異なる i に対しても実は "ほぼ同じ" r で $\max\{f_i(r), G_i(r)\}$ が最小値をとることを見よう. i, i' に対し, $f_i(r) < G_i(r)$ と $f_{i'}(r) > G_{i'}(r)$ は同時に成立しえない. そのように仮定すると,

$$r \ \geq\ \lfloor r(S_i+1)\rfloor - \lceil rS_i \rceil \ >\ \sum_j \lfloor r(S_j+1)\rfloor - N \ >\ \lfloor r(S_{i'}+1)\rfloor - \lceil rS_{i'} \rceil \ >\ r-2$$

となるからである (第 2, 3, 4 辺が整数であることに注意). よって, $r \geq 1$ かつ (2) を満たす r の区間 (これは二分探索で求まる) において, 次の二分探索を行えばよい.

r の値を決めたとき,

- すべての i で $\lceil rS_i \rceil = N - \sum_{j\neq i} \lfloor r(S_j+1)\rfloor$ なら, そこで終了.
- ある i で $\lceil rS_i \rceil < N - \sum_{j\neq i} \lfloor r(S_j+1)\rfloor$ なら, その r 以上の方に進む.
- ある i で $\lceil rS_i \rceil > N - \sum_{j\neq i} \lfloor r(S_j+1)\rfloor$ なら, その r 以下の方に進む.

この二分探索中に調べた r の値について x_i の最小値を更新すればよい. x_i の最大値に関しても同様である.

(ii) $r < 1$ のとき

$r < 1$ とすると, $\lceil rS_i \rceil \geq \lfloor r(S_i+1)\rfloor$ であるから, $rS_i \leq x_i \leq r(S_i+1)$ を満たす整数 x_i は高々 1 個であり (存在するなら $x_i = \lceil rS_i \rceil = \lfloor r(S_i+1)\rfloor$), 条件を満たすためには $\sum_j \lceil rS_j \rceil = N$ でなければならない (r を決めると各政党の得票数が決まってしまう). 逆に, $\sum_j \lceil rS_j \rceil = N$ と条件 $(*)$ が満たされていればよい.

$\sum_j \lceil rS_j \rceil$ は r について広義単調増加であるから, 二分探索によって $\sum_j \lceil rS_j \rceil = N$ となる r の範囲 I (これは区間である) を求めることができる. $r \in I$ であって, 条件 $(*)$ (すなわち, 各 i に対して $\lceil rS_i \rceil \leq \lfloor r(S_i+1)\rfloor$) を満たすものが 1 つでも存在するかどうかを知りたい. $r \in I$ においては各 i に対して $\lceil rS_i \rceil$ は一定である (すべて広義単調増加だから). よって, $r = \max I$ のときに $\lfloor r(S_i+1)\rfloor$ たちが最大になるから条件が最も緩くなる. 言い換えると, ある $r \in I$ が条件を満たせば $r = \max I$ も然りであり, x_i は変わらないので, $r = \max I$ についてだけ調べればよい.

二分探索に関して. 分母が $S_i + 1$ のいずれかであるような有理数は, 幅が $\dfrac{1}{(\max_i(S_i+1))^2}$ 以下の区間には高々 1 個しか存在しない. よって,

区間を二等分していって, 区間内の適切な有理数が 1 個になったらそこで分けて終了

とすれば, 反復回数は $O\left(\log N + \log \max_i (S_i+1)\right)$ 回となる. 二分探索中で行う処理は $O(M)$ 時間なので, 全体の計算量は $O\left(M(\log N + \log \max_i (S_i+1))\right)$ となる.

実装

整数のオーバーフローに注意する必要がある. $r \geq 1$ の範囲を調べるとき, 二分探索の下界を 1, 上界を $1+2^k$ ($k \in \mathbb{Z}, 1+2^k > \dfrac{N}{\sum_j S_j}$) に設定するなどで, 分子・分母が 64 ビット整数の範囲の分数で処理できる.

結果

正解　0

提出チーム　2

提出　10