Cookie Counter

原案　：小室
問題文：水野
解答　：水野・森・山口
解説　：水野

問題概要

・N枚クッキーがある
・1日にX枚未満食べる
・D日以内に全部食べる

食べ方は何通りあるか？

$N \leqq 2000$、$X \leqq 2000$、$D \leqq 10^{12}$

解法1

i日目までにj枚クッキーを食べる方法
C(i,j)を状態としたDPを行列で書く

サンプル１：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(i,0) \\ C(i,1) \\ C(i,2) \\ C(i,3) \\ C(i,4) \\ C(i,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(i+1,0) \\ C(i+1,1) \\ C(i+1,2) \\ C(i+1,3) \\ C(i+1,4) \\ C(i+1,5) \end{pmatrix}$$

解法1

これを行列累乗する

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{D} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(N,0) \\ C(N,1) \\ C(N,2) \\ C(N,3) \\ C(N,4) \\ C(N,5) \end{pmatrix}$$

計算量：$O(N^3 \log D)$ $\rightarrow$ TLE

解法1

高速化

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

斜めに同じ数字が並ぶので1列だけ計算すれば良い：$O(N^2 \log D)$

解法2

クッキーを食べる日数は最大でN日以下

1日1枚以上X枚未満食べるDP

$C'(i,j)=C'(i-1,j-1)+\cdots+C'(i-1,j-x+1)$

: $O(N^3)$

変形して

$C'(i,j)=C'(i,j-1)+C'(i-1,j-1)-C'(i-1,j-x)$

: $O(N^2)$

解法2

D日ですべてのクッキーを食べる方法は

$C(D,N) = {}_{D}C_{1}\, C'(D,1) + \cdots + {}_{D}C_{N}\, C'(D,N)$

: $O(N^2)$

解法3

D日中k日だけX枚以上食べる

他の日は0枚以上食べる

＝1日に0枚以上D日でN-kX枚食べる

$= {}_{D}C_{k} \times {}_{N-kX+D-1}C_{D-1} = {}_{D}C_{k} \times {}_{N-kX+D-1}C_{N-kX}$

解法3

包除原理を用いる

C(D,N)=

＋(D日中0日X枚以上食べる)

ー(D日中1日X枚以上食べる)

＋(D日中2日X枚以上食べる)

…

$=\Sigma_k(-1)^k \times {}_DC_k \times {}_{N-kX+D-1}C_{N-kX}$

計算量：O(N)

結果

First AC

On-line　2-2-2 (56:32)

On-site　11-.- ---11...- . .-. -.-- ... .- .. . . .--. -.-- (1:04:13)

AC / Submit　24/56

AC / Trying Team　24/28