

ICPC2023 模擬国内予選

G 問題：映画を見よう

原案	ei1333
問題文	climpet
データセット	ei1333
解答	beet, climpet, ei1333, hos
解説	ei1333

問題概要

- N 種類の映画が 1 日に 1 回上映されている
 - 1 日は T 時間からなる
 - 映画 i ($1 \leq i \leq N$) は毎日 S_i ($0 \leq S_i < T$) 時からその D_i ($1 \leq D_i \leq T$) 時間後まで放映される
 - 映画は日をまたいで放映されることもある
- 全 N 種類の映画を見終えるのは最短で何時間後か？
 - 映画は最初から最後まで継続して視聴する
 - 複数の映画を一度に視聴することはできない
- 制約: $N \leq 2 \times 10^4, T \leq 10^9$

判定問題

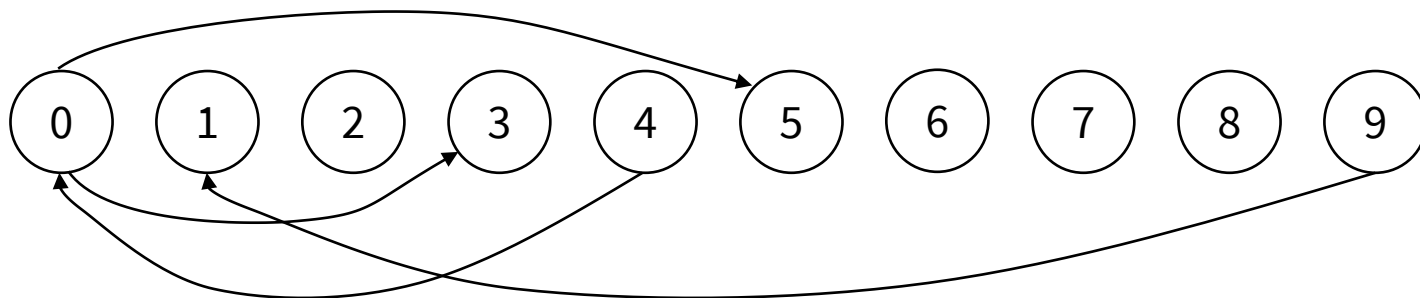
- 解の二分探索を考える
 - 全 N 種類の映画を見終えるのは最短で何時間後か？
↓
 - 全 N 種類の映画を t 時間以下で見終えられるか？
- 判定問題を解くための計算量を $f(N)$ とすると $O(f(N) \log N)$

問題の簡略化

- 仮想的な映画を 1 個追加する
 - 毎日 $t \bmod T$ 時から T 時まで上映される
 - 最短日数を求める問題に言い換え可能
 - 全 N 種類の映画を t 時間以下で見終わられるか？
- ↓
- 全 $N + 1$ 種類の映画を $\left\lceil \frac{t}{T} \right\rceil$ 日以下で見終わられるか？

有向グラフ

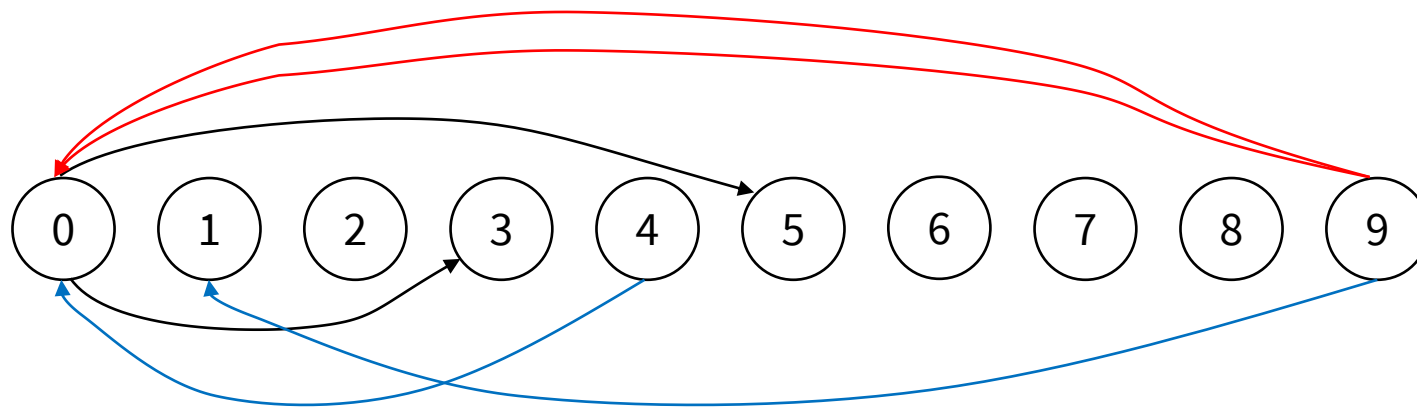
- T 頂点(頂点 $0, 1, \dots, T - 1$) のグラフを考える
 - 各 $i (1 \leq i \leq N)$ について頂点 S_i から $(S_i + D_i) \bmod T$ に有向辺を張る



有向グラフ

- 全種類の映画を $d + 1$ 日で見終えられるか？
 - 有向グラフ上で左向きに向かう辺(下図の青い辺)の個数を p とする
 - $d - p$ 本の有向辺(下図の赤い辺)を頂点 $T - 1$ から 0 に張る

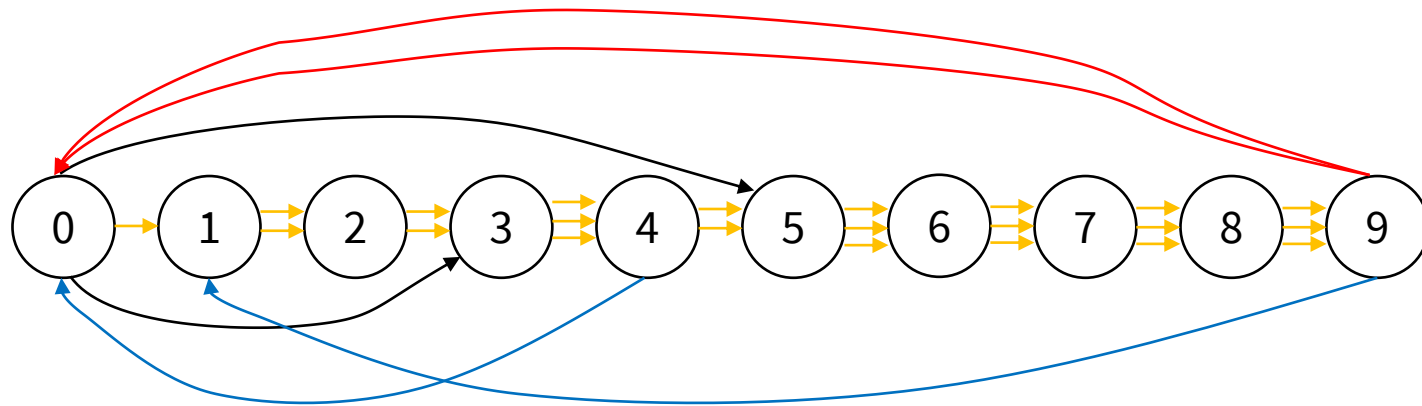
例: $d = 4$



有向オイラー路

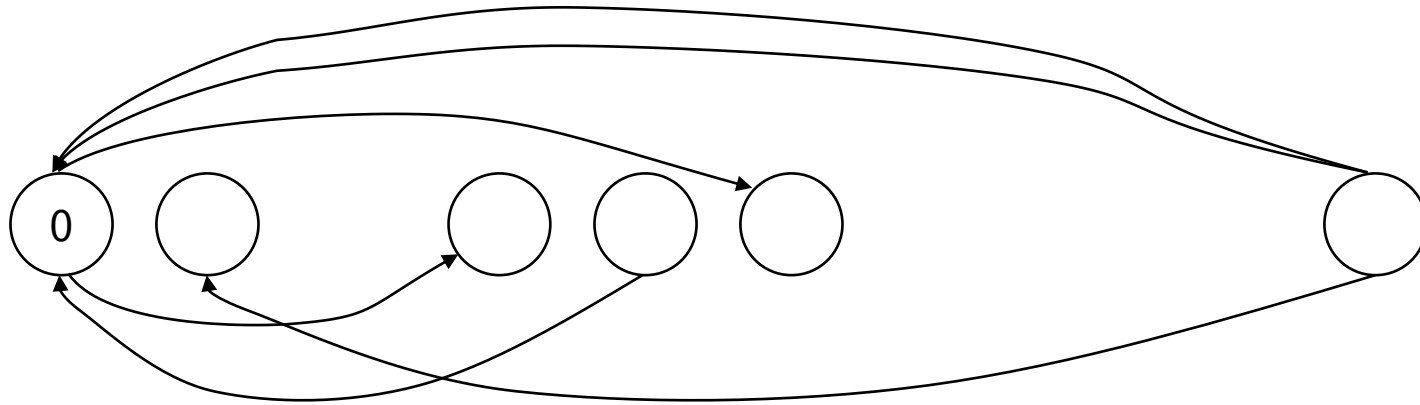
- 有向オイラー路に帰着する
 - 各 $i (0 \leq i < T - 1)$ について頂点 i から $i + 1$ に好きな本数だけ辺を追加できる
 - 頂点 0 と全ての映画の辺が連結な **オイラー路** を作れるか判定する

例: $d = 4$

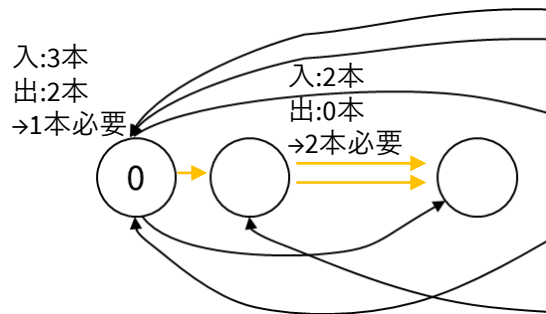


有向オイラー路

- 座標圧縮して孤立点を消しておく

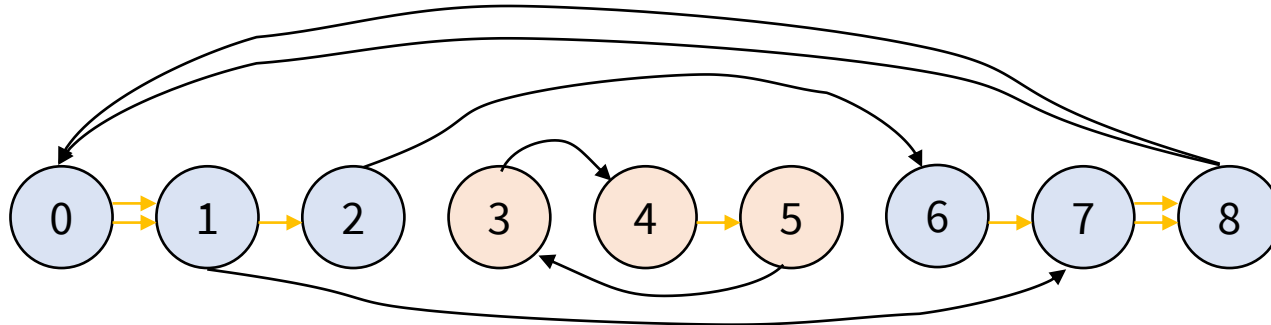


- 有向オイラー路の性質: 各頂点の入次数と出次数が等しい
 - 頂点 $0 - 1, 1 - 2, \dots$ の順に、追加する必要のある辺の本数が一意に定まる



連結性の確認

- オイラーグラフは連結性を要求することに注意する
 - 非連結なケース



- DFS/BFS や Union Find などで確認できる

まとめ

- 映画の開始時刻と終了時刻を端点とした有向グラフを作る
 - 孤立点は座標圧縮により消しておく
- 解の二分探索をする
 - 任意の隣接する頂点（頂点 i から頂点 $i + 1$ ）に有向辺を張れる
 - 各頂点の入次数と出次数の差を用いて連結な有向オイラーグラフになるか判定する
- 時間計算量 $O(N \log N)$
- 補足: 二分探索をしなくてもよい
 - おおよその日数は 各頂点の入次数と出次数の差の累積和の min
 - 非連結になる場合は少しずれる

ジャッジ解

- beet(C++): 144 lines, 3.0 KB
- climpet(C++): 115 lines, 2.0 KB
- ei1333(C++): 93 lines, 2.1 KB
- hos(C++): 123 lines, 3.0 KB

統計情報

- AC teams / Trying teams
 - 0 / 6