模擬国内２０１９Ｈ

不思議なボタン

原案：smiken
問題文：climpet
データセット：smiken
解答：climpet, misawa, smiken
解説：smiken

問題概要

・n 個の部屋があり移動関係によってDAGをなす

・移動で得られるコインは移動ボタンに固有で1,2,3のどれか

・部屋 1 から移動を開始して

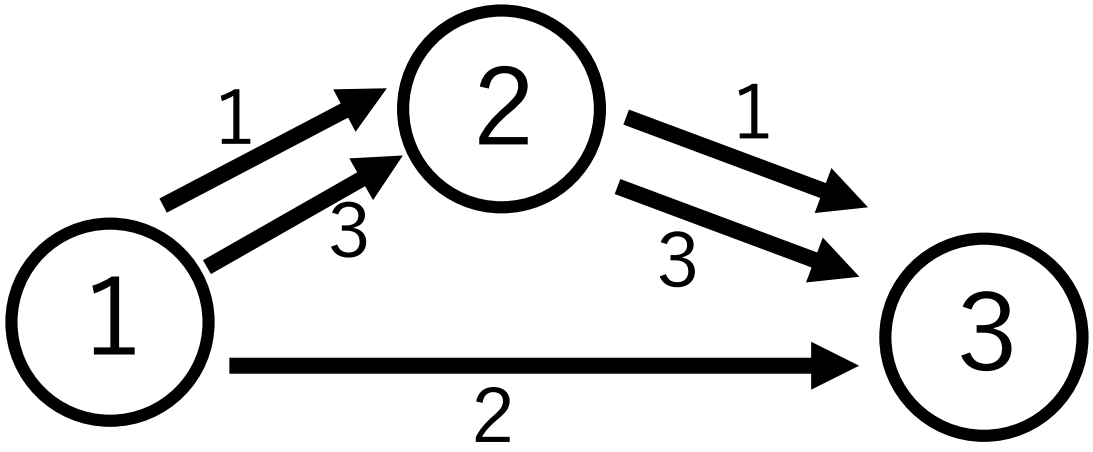
　・移動せずにコインを 1 個稼ぐ or 移動ボタンを押す

を選ぶ（ほかの操作は不可能）

・コインをT個持って部屋Eにいるようなボタンの押し方

は何通り？

例



E=3　T=4　の場合

$1 \overset{1}{\rightarrow} 2 \overset{1}{\rightarrow} 3$　：６通り

$1 \overset{3}{\rightarrow} 2 \overset{1}{\rightarrow} 3$　：１通り

$1 \overset{1}{\rightarrow} 2 \overset{3}{\rightarrow} 3$　：１通り

$1 \overset{3}{\rightarrow} 2 \overset{3}{\rightarrow} 3$　：０通り

$1 \overset{2}{\rightarrow} 3$　：３通り

計１１通り

愚直にやると

DPを検討する

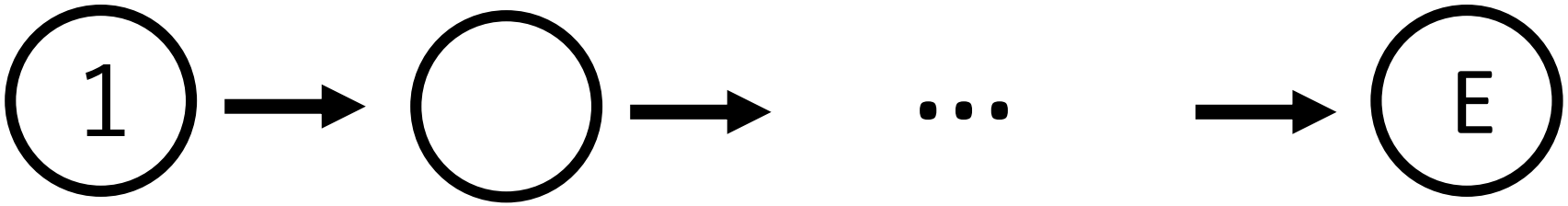
DP[i][t]= コイン t 個持って部屋 i から出る押し方の数

を更新していく

O((N+M)T)で間に合わない……

これは伏線

パスが１つだけのとき



部屋１から部屋Eまでの移動の個数：b
部屋１から部屋Eまでの移動によって稼ぐコインの合計：t

このときの押し方の個数は Comb(T－t+b,b)

ただしn<rやr<0のときComb(n,r)=0とする

一般の場合

P：部屋１から部屋Ｅまでのパスの集合

各パスp∈Pを選んだときの移動の個数は
Comb(T－t_p+b_p,b_p)通り

したがって全移動の合計は

$$\sum_{p \in P} \mathbf{Comb(T-t_p+b_p,b_p)}$$

ところで

Comb(n-a,r)＝(n-a)(n-a-1)･･･(n-a-r+1)/r!

rを定数、 n-a>＝0とすると

Comb(n-a,r)はnのr次多項式

つまり

Comb(T－t_p+b_p,b_p)はTのb_p次多項式
(ただしT≧t_p-b_p)

解の性質

Comb(T－t_p+b_p,b_p)はTのb_p次多項式
(ただしT≧t_p-b_p)

・b_pの値は高々n
・t_p-b_pの値は高々2n

つまりパスpを一つえらんだとき
そのパスを使うボタンの押し方の個数は
T≧2nでは Tの(高々)n次の多項式で書ける

全てのパスについてn次の多項式を足し合わせても
n次の多項式のまま

⇩

部屋ごとにこのn次多項式が求まればよい

⇩

陽な形で求めるのは大変そう

⇩

ラグランジュ補間を用いる

ラグランジュ補間

n次式を復元するためにはn+1点での値が必要

DPでT=2n,2n+1,…,3nのn+1点をあらかじめ求めておく

標本点が等間隔に並んでいるなら
多項式の1点での値を復元するのはO(n)で可能

→　**各クエリにO(n)で答えることができる**

（参考）ラグランジュ補間

xのn次多項式F(x)のF(0),F(1),…,F(n)が既知のとき

$$F(N) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} F(i) \frac{N(N-1)\dots(N-i+1)(N-i-1)\dots(N-n)}{i(i-1)\dots 1(-1)\dots(i-n)}$$

先頭と末尾からの累積積を持っておけば
F(N)の値をO(N+log *MOD*)で求められる。

要するになにをするか

①
DP[i][t]＝コイン t 個持って部屋 i から出る押し方の数をt ≤ 3nまで求めておく　**O(n(n+m))**

②
各クエリ(E,T)ごとに
・T ≤ 3nならDPテーブルに答がある　**O(1)**
・T>3nならDP[E][t]の2n ≤ t ≤ 3nの部分から
　ラグランジュ補間でDP[E][T]を復元　**O(n)**

全体でO(n^2+nm+nQ)

統計情報

ジャッジ解

climpet (C++)	108行	1916 byte
misawa (C++)	92行	2978 byte
smiken (C++)	115行	2043 byte

提出チーム数　3
正答チーム数　3

FA

Following Teams Should Buy Us BBQ. (107:28)