JAG ICPC模擬地区予選2020
I: Irreversible Reactions

原案: drken1215
問題文: Darsein
データセット: not
解答: Darsein, hec, hos, not, tsutaj
解説: Darsein

問題概要

有向グラフがある。初期は頂点Sにいる。

1ステップごとに、今いる頂点から出ている辺から一様ランダムに1つ選び、辺の先に移動することを繰り返す。

出ている辺がないとき、あるいは今いる頂点からSに戻れないとき、ステップを終了する。

ステップを終了するまでの期待値を求めよ。無限ステップかかるとき、-1を出力せよ。

制約: $2 \leq N \leq 200$, $1 \leq M \leq 1000$

考察

- 基本的に出ている辺がない頂点 = Sに戻れない頂点なので、Sに戻れない頂点について考える
    - ただし、Sから出ている頂点がないときは例外で、答えは 0
- 有向グラフの強連結成分分解を考えたとき、Sが含まれる強連結成分以外の頂点 = Sに戻れない頂点
    - 強連結成分はO(N+M)で求めることもできるが、今回は Nが小さいのでBFSをN回行う O(N(N+M))のアルゴリズムや、ワーシャルフロイドのような $O(N^3)$のアルゴリズムでもOK
    - Sから到達できる頂点の中に Sに戻れる頂点がない場合、無限ステップかかるので答えは -1
- e_v := 頂点vから移動を始め停止するまでの期待値とすると、
    - vからSに戻れないとき: $e_v = 0$
    - vからSに戻れるとき: vからの出次数を d_vとして、$e_v = \Sigma_{(v,u)\in E} (e_u/d_v) + 1$

解法

- 期待値の連立方程式は以下のように行列の形で書くことができる

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,N} & 1 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \dots & p_{N,N} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ここで、
  - vからuに辺がある場合、$p_{v,u} = 1 / d_v$
  - ない場合、$p_{v,u} = 0$
- ただし、頂点vからSに戻れないときのv行目は 0, 0, ..., 1, ..., 0, 0 (v番目だけ 1)

解法

- 式を変形して、

$$\begin{pmatrix} p_{1,1}-1 & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} & 1 \\ p_{2,1} & p_{2,2}-1 & \cdots & p_{2,N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N}-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- これをガウスジョルダンなどのアルゴリズムで解けばよい
  - 計算量: $O(N^3)$
- e_Sが答え
- 答えをmod 10^9+7でも求める必要があるが、必要な計算は加減乗除だけなので、逆元を求められれば通常の四則演算で計算できる

統計

Acceptances / Submissions

- 22 / 45 (48.89%)

First Acceptance

- __KING__ (00:59)