

ICPC模擬地区予選2021

I: $(N+1)$ -legged race

原案: climpet

問題文: climpet

データセット: tsutaj

解答: beet, climpet, hos

解説: climpet

問題概要

- S 人の生徒がいる。各生徒は運動能力 A_i と身長 H_i を持つ。
- この中から走者として N 人を選び、一列に並べる。このチームの強さは (運動能力の総和) - (隣り合う二人の身長差の絶対値の総和) となる。
- チームの強さを最大化せよ。

制約

- $2 \leq S \leq 10^5$
- $2 \leq N \leq \min(S, 200)$



生徒の並び順

- 走者 N 人を決めたとき、この N 人の並べ方については、明らかに身長順が最適である。
- このとき、チームの強さは、
(運動能力の総和) + (身長 of 最小値) - (身長 of 最大値)
となる。

解法1 (by hos)

- 生徒を身長の上昇順に並べる。
- $dp_j[k] = (j \text{ 番目までの生徒から } k \text{ 人を選ぶときの、(運動能力の総和) - (身長 of 最小値) の最大値) \text{ とする。}$
- j 番目の生徒について、次のように値を更新する。
 - $ans = \max(ans, dp_{j-1}[N-1] + A_j - H_j)$
 - $dp_j[1] = \max(dp_{j-1}[1], A_j + H_j)$
 - $dp_j[k] = \max(dp_{j-1}[k], dp_{j-1}[k-1] + A_j)$ for each $2 \leq k < N$
- 計算量は $O(S(N + \log S))$ 時間。

解法2 (by beet)

- 最適解において、運動能力が一番低い走者を w とする。
- 運動能力が w より高い生徒を身長順に並べてできる列を B とする。
 - 運動能力が同じ生徒については、適当に順位をつけておく。
- 最適解は、 B 中の**連続する** N 人 (w を含む) を並べたものとなる。
 - 証明: w を含む連続しない N 人を選ぶのが最適であると仮定する。このとき、スキップされた生徒の一人を x とする。 w の代わりに x を選ぶことにすると、 $A_x > A_w$ という前提から運動能力の総和は大きくなる一方、身長によるペナルティは同じか小さくなる。したがって、チームの強さが増加するが、これは最適解が w を含むという仮定に反する。

解法2 (by beet)

- 列 B を平衡二分探索木を用いて管理する。
- 生徒を身長の降順に処理する。
 - その生徒を B に追加する。
 - その生徒の前後 (最大) $N - 1$ 人ずつを取り出す。
 - これら (最大) $2N - 1$ 人から、連続する N 人の選び方をすべて試す。
- 連続する $2N - 1$ 人を取り出す部分がボトルネックとなるが、これは一回あたり $O(N + \log S)$ 時間で実現できる。
 - 実装上は、イテレータを単純にインクリメント・デクリメントするだけでよい。ただし定数倍はやや遅いことがある。
- 計算量は解法 1 と同じく $O(S(N + \log S))$ 時間。

統計情報

- AC / trying teams
 - 32 / 33
- First acceptance
 - UT a.k.a Is (15 分)