

I: N-1 Truths and a Lie

原案 : not

問題文 : darsein

データセット : prime

解答 : beet, hos, prime

問題概要

N人がそれぞれ「山 a_i は山 b_i より c_i メートル高い」という主張をする

1人だけ嘘をついているので、だれが嘘をついているか求めよ

$2 \leq N \leq 2e5$, 山の数 $2 \leq K \leq 2e5$, $a_i \neq b_i$, $\{a_i, b_i\} \neq \{a_j, b_j\}$, $1 \leq c_i \leq 1e9$

嘘つきが一意に定まることが保証される

考察

K頂点N辺のグラフとして見る(頂点: 山, 辺: 人)

嘘つきがない場合、辺を辿ることで、連結成分内の山同士の高さの差がわかる

嘘つきは1人なので、

サイクルが嘘つきの辺を含まない \Leftrightarrow サイクルを一周して高さの差が0

がいえ

方針1

各連結成分の適当な頂点からDFSしながら、根からの高さの差を計算する

後退辺を見たとき、高さが矛盾していないか確かめる

DFS木と後退辺でできるサイクルについて、

矛盾している場合: このサイクル内に嘘つきがいる

矛盾していない場合: このサイクル外に嘘つきがいる

がわかる

この情報を集計することで嘘つきが求められる

方針1

矛盾が報告された後退辺が1本だけ→その後退辺が嘘つき

複数ある場合→DFS木上に嘘つきがいる 次のようにして嘘つきが求まる

矛盾がある場合、サイクルを構成するパスに+1、矛盾しない場合は全体に+1してそのパスに対して-1

していったときに、和が後退辺の数と同じになった辺が答え

パスに対して加算するのは、木に対するimos法を使うことで定数時間でできる

計算量 $O(N+K)$

注意: 矛盾がある/ないの一方だけ集計しても一意に定まらないことがある

方針2

各辺を除去したときに矛盾が生じないか調べる

愚直にやると $O(N^2)$

重み・rollback付きUnionFindを使って分割統治すると、 $O(N(\log N)^2)$ になる

rollback付きUnionFind:

- 過去の状態を復元できるUnionFind
- snapshot()で今の状態を記録し、後でその状態まで戻す(rollback)ことができる
- 経路圧縮をしないことで、1回のunion操作で高々2要素しか触らないので、操作履歴を保存することで実現できる

方針2

人1~Nを順に一行に並べる

$\text{mid} = \text{floor}(N/2)$ とする

snapshotを保存...①

$[\text{mid}, N]$ 内で矛盾がないか重み付きUnionFindで確認

矛盾がないとき $\rightarrow [1, \text{mid})$ について再帰的に調べる

①の状態にrollbackし、 $[1, \text{mid})$ と $[\text{mid}, N]$ を逆にした場合についても同様に調べる

区間が1人になったらその人が答え

その他

連結性は保証していないので、DFSするときは注意

実は $N \geq 5$ (嘘つきの一意性と、多重辺や自己ループがないことから言える)

$N=1$ はイジワルなので制約から外しました

嘘つき x は「 x を除くと矛盾しない」「 x 以外の任意の y を除くと矛盾する」と問題文に書いてあり、 $N=1$ のとき後者は y となりうる人はいないので真

統計情報

- Acceptances
 - 17 teams
- First Acceptance
 - Time Manipulators (93 min)