



# J: Unfair Game

JAG 春コンテスト 2014

原案：岩田

解答：保坂・伊藤・森

解説：保坂



# 問題概要

- $N$  個の石の山
  - 最初はそれぞれ  $S_1, \dots, S_N$  個の石
- 2 人ゲーム
- 各ターンに 1 個の山から石を何個か取る
  - 先手は 1 個以上  $A$  個以下の石
  - 後手は 1 個以上  $B$  個以下の石
- どちらが必勝？

# 考察

- たくさん取れる方が有利！！！！

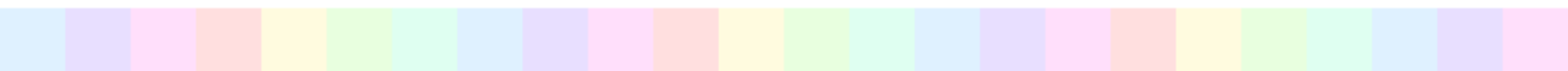
# 考察

- たくさん取れる方が有利！！！！
  - という直感が働くが、だいたい正しい
  - しかしそもそも  $S_i$  が全部小さかったりするとたくさん取れる権利が無意味になる



そこまで Unfair じゃない

$A = B$  のとき



# $A = B$ のとき

- これが解けないと解けない
- 典型問題です
  - Sprague-Grundy theorem
  - 一応簡単に解説

# $A = B$ のとき

- 平等な, 行動できなくなったほうが負けなゲームなので, Nim と等価
- 1 個の山に石が  $s$  個ある状態の Grundy 数は  $s \bmod (B + 1)$ 
  - Grundy 数  $k$  の状態から 1 手行動して,
    - Grundy 数  $0, 1, \dots, k - 1$  の状態にはできる
    - Grundy 数  $k$  の状態にはできない

# $A = B$ のとき

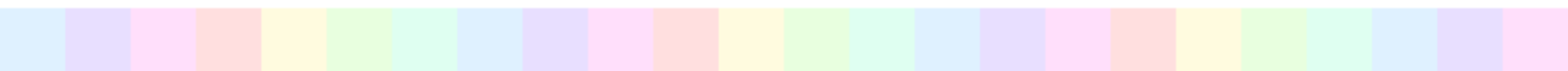
- $S_i \bmod (B + 1)$  たちの XOR をとって、その値が非 0 なら先手必勝, 0 なら後手必勝
  - 複数のゲームを同時に進められる状態の grundy 数はそれらの XOR





先手でしかもたくさん取れるなんてずるい

$A > B$  のとき



# $A > B$ のとき

- $A = B$  で先手必勝な条件なら先手必勝
  - $B$  個までしか取れないつもりで戦えばよい

# $A > B$ のとき

- $A = B$  で先手必勝な条件ではないとき
  - $S_i \bmod (B + 1)$  たちの XOR は 0
  - $\bmod (B + 1)$  での XOR が 0 の状態を後手に送りつけられれば先手必勝
    - 石が  $(B + 1)$  個以上の山があれば, その山から  $(B + 1)$  個取ればよい
    - 石が  $(B + 1)$  個以上の山がなければ, 先手も  $B$  個までしか取れないゲームと同じなので後手必勝



先手が為す術が (あまり) ない

$A < B$  のとき



# $A < B$ のとき

- 先手は初手で、 $A > B$  のときに見た先手必勝条件をつぶせれば勝ち、つぶせなければ負け
  - 「XOR が 0」または「大きい山がある」

# $A < B$ のとき

- 石が  $(A + 1)$  個以上の山が後手に渡ったら後手必勝
  - ということは, 石が  $(A + 1)$  個以上の山が 2 個あったらその時点で後手必勝
  - 石が  $(A + 1)$  個以上の山が 1 個だけなら, 先手はそこから何個か取らないと負ける
  - 石が  $(A + 1)$  個以上の山がそもそもない場合は, 後手も  $A$  個までしか取れないゲームと同じ (→解けている)

# $A < B$ のとき

- $\text{mod } (A + 1)$  で XOR が 0 な状態が後手に渡ったら後手必勝
  - ある山から先手が初手で取るべき石の個数は高々 1 通り

# $A < B$ のとき

- 石が  $(A + 1)$  個以上の山が 1 個だけあるとき, 先手は初手でその山から以下のように取れたら勝ち, そうでなければ後手必勝
  - (1 個以上  $A$  個以下取る)
  - mod  $(A + 1)$  での XOR が 0 になるように取る
  - 残りが  $(A + 1)$  個未満になる



# コメント

- 小さい場合で実験してみると解法が見えてくるかもしれません
  - 愚直な DP とかを書いて出力を試してみる
  - ICPC では、このような愚直な DP をぱっと書けるようになった上で、勇気をもって PC を奪いにいくことも時に大切

# 結果

- Accepted / Trying Teams / Submission
  - 2 / 6 / 11
- Accepted Teams
  - cgy4ever (216:53)
  - wakaba (231:26)